Matriisiryhmien $U(n)$ ja $Sp(n)$ geometrinen merkitys: 3.6.

3.2.2. <u>Lause</u>

(1) $\rho_n(U(n)) = O(2n) \cap \rho_n(GL_n(\mathbb{C}))$

(2) $\Psi_n(Sp(n)) = U(2n) \cap \Psi_n(GL_n(\mathbb{H}))$

(3) $(\rho_{2n} \circ \Psi_n)(Sp(n)) = O(4n) \cap (\rho_{2n} \circ \Psi_n)(GL_n(\mathbb{H}))$

<u>Tod</u>: $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ pätee $\rho_n(A^*) = \rho_n(A)^*$:

$$A = (a_{jk} + i b_{jk}) \qquad A^* = (a_{kj} - i b_{kj}) \qquad a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{R}$$

$$\rho_n(A) = \begin{pmatrix} a_{jk} & b_{jk} \\ -b_{jk} & a_{jk} \end{pmatrix} \qquad \rho_n(A^*) = \begin{pmatrix} a_{kj} & -b_{kj} \\ b_{kj} & a_{kj} \end{pmatrix}.$$

Jos $A \in GL_n(\mathbb{C})$ niin pätee

$$\rho_n(A)\rho_n(A)^* = \rho_n(A)\rho_n(A^*) = \rho_n(AA^*)$$

saadaan: $A \in U(n) \overset{L.3.2.1}{\Longleftrightarrow} AA^* = I_n \Longleftrightarrow \rho_n(A)\rho_n(A)^* = I_{2n}$

$\overset{L.3.2.1}{\Longleftrightarrow} \rho_n(A) \in O(2n)$.

(2) samoin: $\Psi_n(A^*) = \Psi_n(A)^*$:

$$A = (z_{ls} + w_{ls} j) \qquad A^* = (\bar{z}_{sl} - j \bar{w}_{sl}) = (\bar{z}_{sl} - w_{sl} j), \quad z_{ls}, w_{ls} \in \mathbb{C}$$

$$\Psi_n(A) = \begin{pmatrix} z_{ls} & w_{ls} \\ -\bar{w}_{ls} & \bar{z}_{ls} \end{pmatrix} \qquad \Psi_n(A^*) = \begin{pmatrix} \bar{z}_{sl} & -w_{sl} \\ \bar{w}_{sl} & z_{sl} \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\Psi_n(A)^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_{sl} & -w_{sl} \\ \bar{w}_{sl} & z_{sl} \end{pmatrix}$$

(3) seuraa kohdista (1) & (2). $\square$

3.2.3. Lause

$$O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid |R_A(\underline{X})| = |\underline{X}| \ \forall\, \underline{X} \in \mathbb{K}^n\}$$

Tod: Tapaus $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ seuraa siitä, että sisätulo on normin määräämä:

$$|\underline{X}+\underline{Y}|_{\mathbb{R}}^2 = \langle \underline{X}+\underline{Y}, \underline{X}+\underline{Y}\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \underline{X},\underline{X}\rangle_{\mathbb{R}} + 2\langle \underline{X},\underline{Y}\rangle_{\mathbb{R}} + \langle \underline{Y},\underline{Y}\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \underline{X},\underline{Y}\rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}\left\{ |\underline{X}+\underline{Y}|_{\mathbb{R}}^2 - |\underline{X}|_{\mathbb{R}}^2 - |\underline{Y}|_{\mathbb{R}}^2 \right\}.$$

Tapaus $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: Ol. $A \in GL_n(\mathbb{C})$ s.e. $R_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ normin säilyttää. Tällöin myös $R_{\mathfrak{S}_n(A)} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ säilyttää normin: $\forall\, \underline{X} \in \mathbb{C}^n$ pätee

$$|R_{\mathfrak{S}_n(A)}(f_n(\underline{X}))|_{\mathbb{R}} \underset{\uparrow}{=} |f_n(R_A(\underline{X}))|_{\mathbb{R}} \overset{(3.1.3)}{=} |R_A(\underline{X})|_{\mathbb{C}} \overset{\text{ol}}{=} |\underline{X}|_{\mathbb{C}} \overset{3.1.3}{=} |f_n \underline{X}|_{\mathbb{R}}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \\ {\scriptstyle R_A}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle R_{\mathfrak{S}_n(A)}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

kommutoi

Tap $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{S}_n(A) \in O(2n) \overset{3.2.2}{\Rightarrow} A \in U(n).$$

Tapaus $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ vastaavasti. □.

3.3. Erityiset ortogonaaliryhmät

3.3.1. Lause $\forall\ A \in O_n(\mathbb{K})\quad |\det A| = 1$.

Tod: $\quad 3.2.1\ (4) \Rightarrow\ A \cdot A^* = I_n \Rightarrow$

$$1 = \det(AA^*) = \det(A)\det(A^*) = \det(A)\,\overline{\det(A)} = |\det A|^2$$

Huom. Tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ $\det(A) := \det(\psi_n(A))$
(ja $\psi_n(A^*) = \psi_n(A)^*$). □.

Saadaan eri tapaukset:

- $A \in O(n)$: $\quad \det A = \pm 1$
- $A \in U(n)$: $\quad \det(A) = e^{i\theta}$, $\quad \theta \in [0, 2\pi)$
- $A \in Sp(n)$: $\quad$ Fakta: $\det A \in \mathbb{R}$ (ei tod.)
  $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
  Myöhemmin nähdään: $\det A = 1$

Määritelmä

$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ erityinen ortogonaaliryhmä

$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ " unitaariryhmä

$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$ erityinen lineaarinen ryhmä

3.4. Alempiulotteiset ortogonaaliset ryhmät

$O_n(\mathbb{K})$ pienillä n

$GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

- $O(1) = \{(1), (-1)\}$ • $SO(1) = \{(1)\}$

isomorfisia 1-kás. ryhmän kanssa, jossa 1 tai 2 alkiota.

- $O(2)$ 3.2.1 ⇒ $A \in O(2)$ niin muodostavat $\mathbb{R}^2$:n orton. kannan
⇒ void. val. 1. sir $= (\cos\theta, \sin\theta)$ $\theta \in [0,2$
⇒ 2. sir: $(-\sin\theta, \cos\theta)$ tai $(\sin\theta, -\cos\theta)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ tai } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det A = 1$ $\det A = -1$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

≙ ympyrä, ryhmätoiminto: kulmien yhteenlasku

$$O(2) = SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

≙ kahden ympyrän erillinen yhdiste
HT: millainen ryhmätoiminto on ympyrällä

- $U(1) = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi) \} \cong SO(2)$
ympyräryhmä

$SU(1) = \{(1)\}$

- $Sp(1) = \{ (a + bi + cj + dk) \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \}$
yksikkökvaternioiden ryhmä ≙ $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}^1$

<u>Huom</u>. S^0, S^1, S^3 ainoat pallot, joilla ryhmärakenne.

Huom Kurson mainoskuvassa S^1 operoi S^3:lla

$$S^3 = \{ q = z + wj \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \} = \{ (re^{i\varphi}, se^{i\psi}) \mid r^2 + s^2 = 1 \}$$

$$S^1 = \{ \lambda = e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi) \}$$

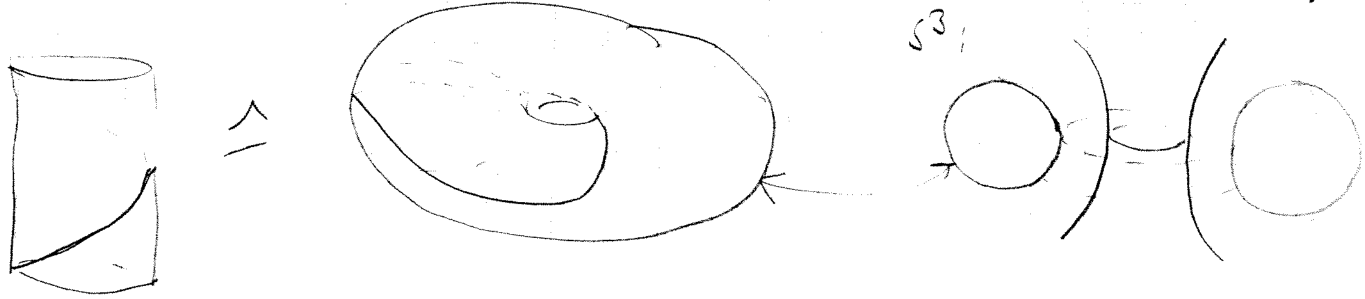
$$S^1 \times S^3 \to S^3$$

$$(\lambda, q) \mapsto \lambda q = \lambda z + \lambda w j = re^{i(\varphi+\theta)} + se^{i(\psi+\theta)} j$$

Kiinteällä $re^{i\varphi} + se^{i\psi} j \in S^3$

$$\{ re^{i(\varphi+\theta)} + se^{i(\psi+\theta)} j \mid \theta \in [0, 2\pi) \} \cong S^1$$

(Lien) ryhmä S^1 operoi (Lien) ryhmällä S^3.



3.4.1. Lause $\quad SU(2) \cong Sp(1)$

Tod:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbb{C}^2 \\ R_A \downarrow & & \downarrow R_{\psi_1(A)} \\ \mathbb{H}^1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

$A \in M_1(\mathbb{H}) = (z + wj)$, $z, w \in \mathbb{C}$

$$\psi_1(z + wj) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

$$z + wj \in Sp(1) \Rightarrow |z|^2 + |w|^2 = 1$$

$\Rightarrow \psi_1(z + wj) \in SU(2)$. Saadaan: $\psi_1(Sp(1)) \subset SU(2)$.

Käänteen: Ol. $A = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ w_2 & z_2 \end{pmatrix} \in SU(2)$

Nyt $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} z_2 & -w_1 \\ -w_2 & z_1 \end{pmatrix} \overset{\det A = 1}{=} \begin{pmatrix} z_2 & -w_1 \\ -w_2 & z_1 \end{pmatrix} \overset{3.2.1(4)}{=} A^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{w}_2 \\ \bar{w}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow z_2 = \bar{z}_1$, $w_2 = -\bar{w}_1$. $\square$.

3.5. Ortogonaaliset matriisit ja isometriat

$O(n)$ origon kiinnittävänä isometriana ja $SO(3)$ vs. $O(3)$.

Pisteiden $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

välinen <u>etäisyys</u> $d(\bar{x}, \bar{y}) := |\bar{x} - \bar{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$

<u>Määritelmä</u> Funktio $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on <u>isometria</u> jos $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ pätee $d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = d(\bar{x}, \bar{y})$.

3.5.1. <u>Lause</u> (1) Jos $A \in O(n)$, niin $R_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on isometria.

(2) Jos $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on isometria s.e. $f(0) = 0$, niin $f = R_A$ jollakin $A \in O(n)$. Erityisesti siis f on lineaarinen

<u>Tod</u>: Ol. $A \in O(n)$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Pätee:

$$d(R_A(\bar{x}), R_A(\bar{y})) = |R_A(\bar{x}) - R_A(\bar{y})| = |R_A(\bar{x} - \bar{y})|$$

$$= |\bar{x} - \bar{y}| = d(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow (1)$$

Ol. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria s.e. $f(0) = 0$.

$$\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n : |f(\bar{x})| = d(f(\bar{x}), 0) \overset{f(0)=0}{=} d(f(\bar{x}), f(0)) = d(\bar{x}, 0) = |\bar{x}|$$

$\Rightarrow$ f normin säilyttävä $\Rightarrow$ f säilyttää sisätulon l.

$$\langle f(\bar{x}), f(\bar{y}) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle.$$

Ol. nyt A matriisi jonka i:s sarake on $f(e_i)$, jolloin

$f(e_i) = R_A(e_i)$ $\forall\, i = 1 \ldots n$ $\Rightarrow$ $A \in O(n)$ sillä sarakkeet ortonormaalit.

Os. $f = R_A$ (ja erityisesti siis f lin.) osoittamalla, (3.12)

että $g := (R_A)^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$.

Selvästi g isometria, $g(0) = 0$ ja $g(e_i) = e_i$ $\forall i = 1, \dots, n$

Olk. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ ja $g(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$

Pätee:

g säilyttää sisätulon kuten f yllä

$$b_i = \langle g(\bar{x}), e_i \rangle = \langle g(\bar{x}), g(e_i) \rangle = \langle \bar{x}, e_i \rangle = a_i$$

$\Rightarrow g(\bar{x}) = \bar{x}$ $\forall$ $\bar{x}$. $\square$.

Huom $O(n)$ $\mathbb{R}^n$:n isometriat, jotka pitävät origon paikallaan $\Rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ pysyy pistejoukkona paikallaan

$O(3)$:n liikkeet $\mathbb{R}^3$:ssa vastaavat (maa)pallon $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ liikkeitä. $O(3)$ vs $SO(3)$?

$\mathbb{R}^3$:n suunnistus: Sovitaan: $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali järjestetty kanta $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ on oikeakätinen (tai positiivisesti suunnistettu) jos $\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2$.

3.5.2 Lause Ol. $A \in O(3)$. $A \in SO(3) \Leftrightarrow$ A:n rivit $\{R_A(e_1), R_A(e_2), R_A(e_3)\}$ muodostavat oikeakätisen ortonormaalin kannan.

Tod: Ol. $R_A(e_1) = (a, b, c)$, $R_A(e_2) = (d, e, f)$ ens. 2. A:n riviä jolloin $R_A(e_3) = \pm\, R_A(e_1) \times R_A(e_2)$ (ortom.)

$= \pm\, (bf - ce,\ cd - af,\ ae - bd)$.