Tarkastellaan $M_n(\mathbb{H})$:n alkioita transformaatioina $\mathbb{C}^{2n}$:ssä tai $\mathbb{R}^{4n}$:ssä:

Aset. bijektio $g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^{2n}$

$$g_n(z_1 + w_1 j, z_2 + w_2 j, \dots, z_n + w_n j) := (z_1, w_1, z_2, w_2, \dots, z_n, w_n)$$

<u>Tehtävä</u>: Määrää $\Psi_n : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ s.e. kaavio

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[d, "R_{\Psi_n(A)}"] \\
\mathbb{H}^n \arrow[r, "g_n"] & \mathbb{C}^{2n}
\end{tikzcd}$$

kommutoi $\forall A \in M_n(\mathbb{H})$.

Kun $n=1$ voidaan asettaa

$$\Psi_1(z+wj) := \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
q = u+vj \in \mathbb{H}^1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{C}^2 \ni (u,v) \arrow[d, "R_{\Psi_1(A)}"] \\
\mathbb{H}^1 \arrow[r, "g_1"] & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd}$$

$A = z+wj \in M_1(\mathbb{H})$

$$R_A q = qA = (u+vj)(z+wj) = uz + uwj + vjz + vjwj$$

$$\left.\begin{matrix} jz = \overline{z}j \\ jw = \overline{w}j \end{matrix}\right\} \; \stackrel{}{=} \; uz - v\overline{w} + (uw + v\overline{z})j$$

$$\hat{=} \; (uz - v\overline{w}, uw + v\overline{z}) = (u,v)\underbrace{\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}}_{=:\,\Psi_1(A)} = R_A(u,v)$$

Voidaan kirj.: $z+wj = a+bi+(c+di)j$, jolloin

$$\Psi_1(a+bi+cj+dk) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

Analogisesti tapaus $n > 1$

$n = 2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{C}^4 \\ R_A \downarrow & & \downarrow R_{\overline{\Psi}_2(A)} \\ \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{C}^4 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} i + c_{11} j + d_{11} k & a_{12} + b_{12} i + c_{12} j + d_{12} k \\ a_{21} + b_{21} i + c_{21} j + d_{21} k & a_{22} + b_{22} i + c_{22} j + d_{22} k \end{pmatrix}$$

$$\overline{\Psi}_2(A) := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} i & c_{11} + d_{11} i & a_{12} + b_{12} i & c_{12} + d_{12} i \\ -c_{11} + d_{11} i & a_{11} - b_{11} i & -c_{12} + d_{12} & a_{12} - b_{12} i \\ a_{21} + b_{21} i & c_{21} + d_{21} i & a_{22} + b_{22} i & c_{22} + d_{22} i \\ -c_{21} + d_{21} i & a_{21} - b_{21} i & -c_{22} + d_{22} i & a_{22} - b_{22} i \end{pmatrix}.$$

Matriisit $A \in \overline{\Psi}_n(M_n(\mathbb{H})) \subset M_{2n}(\mathbb{C})$ ovat <u>kvaternionilineaarisia</u> kompleksisia matriiseja.

26. <u>Lause</u> $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ja $A, B \in M_n(\mathbb{H}^n)$ pätee

(1) $\overline{\Psi}_n(\lambda A) = \lambda \overline{\Psi}_n(A)$

(2) $\overline{\Psi}_n(A + B) = \overline{\Psi}_n(A) + \overline{\Psi}_n(B)$

(3) $\overline{\Psi}_n(AB) = \overline{\Psi}_n(A) \overline{\Psi}_n(B)$

Tod: HT

<u>Huom</u> $1°$ $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ on kvaternionilineaarinen

$\Leftrightarrow$ $g_n^{-1} \circ R_B \circ g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ on $\mathbb{H}$-lineaarinen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \\ & & \downarrow R_B \\ \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \end{array}$$

2° $\psi_n : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ injektio mutta ei surjektio.

Saatiin: injektiot $\varrho_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$

$\psi_n : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$

s.e. $\forall\, A \in M_n(\mathbb{H})$ seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[r, "f_{2n}"] \arrow[d, "R_{\psi_n(A)}"] & \mathbb{R}^{4n} \arrow[d, "R_{(\varrho_{2n}\circ\psi_n)(A)}"] \\
\mathbb{H}^n \arrow[r, "g_n"] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[r, "f_{2n}"] & \mathbb{R}^{4n}
\end{tikzcd}$$

Matriisit $B \in (\varrho_{2n}\circ\psi_n)(M_n(\mathbb{H})) \in M_{4n}(\mathbb{R})$ ovat <u>kvaternionilineaarisia</u> reaalisia matriiseja.

2.7. <u>Lause</u> Seuraavat ehdot yhtäpitäviä matriisille $B \in M_{4n}(\mathbb{R})$

(1) B on kvaternionilineaarinen

(2) B kommutoi kuvausten I_{4n} ja J_{4n} kanssa

(3) $g_n^{-1}\circ f_{2n}^{-1}\circ R_B\circ f_{2n}\circ g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ on $\mathbb{H}$-lin.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^n \arrow[r, "g_n"] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[r, "f_{2n}"] & \mathbb{R}^{4n} \arrow[d, "R_B"] \\
\mathbb{H}^n & \mathbb{C}^{2n} \arrow[l, "g_n^{-1}"'] & \mathbb{R}^{4n} \arrow[l, "f_{2n}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

(2.16.)

Kuvaukset $\mathcal{I}_{4n}$ ja $\mathcal{J}_{4n}$ matriiseja s.e. seuraavat kaaviot kommutoivat

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^n \arrow[r, "f_{2n}\circ g_n"] \arrow[d, "(q\mapsto iq)"'] & \mathbb{R}^{4n} \arrow[d, "R_{\mathcal{I}_{4n}}"] \\
\mathbb{H}^n \arrow[r, "f_{2n}\circ g_n"] & \mathbb{R}^{4n}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^n \arrow[r, "f_{2n}\circ g_n"] \arrow[d, "(q\mapsto jq)"'] & \mathbb{R}^{4n} \arrow[d, "R_{\mathcal{J}_{4n}}"] \\
\mathbb{H}^n \arrow[r, "f_{2n}\circ g_n"] & \mathbb{R}^{4n}
\end{tikzcd}
$$

<u>Huom</u> 1° Kaavioissa $q\mapsto iq$, $q\mapsto jq$ skalaarilla kerrotaan <u>vasemmalta</u>.

2° Tilanne ei täysin analoginen on 2.5. tehtävän kanssa, sillä <u>EI päde</u> $\mathcal{I}_{4n} = \rho_{2n}\circ\Psi_n(iI_n)$

<u>EIKÄ</u> $\mathcal{J}_{4n} = \rho_{2n}\circ\Psi_n(jI_n)$

$$\Psi_1(i) \overset{z=i}{\underset{w=0}{=}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \rho_2\circ\Psi_1(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_1(j) \overset{z=0}{\underset{w=1}{=}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_2\circ\Psi_1(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Täytyy kuitenkin asettaa:

$n=1$: $\quad q = a+bi+cj+dk \qquad iq = ai - b + ck - dj$

$(f_2\circ g_1)(q) = (a,b,c,d)$

$$(f_2\circ g_1)(iq) = (-b,a,-d,c) = (a,b,c,d)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{I}_4}$$

$jq = aj - bk - c + di$ (2.11.)

$$(f_2 \circ g_1)(jq) = (-c, d, a, -b) = (a,b,c,d)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: J_4}.$$

Tod (2.7.): HT

2.8. __Lause__

$A \in M_n(\mathbb{C})$ kääntyvä $\Leftrightarrow$ $\rho_n(A) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ kääntyvä

$A \in M_n(\mathbb{H})$ " $\Leftrightarrow$ $\Psi_n(A) \in M_{2n}(\mathbb{C})$ –"–

__Tod__: Ol. $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tällöin pätee

$A \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow R_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ bijektio

$\Leftrightarrow R_{\rho_n(A)} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ bijektio $\Leftrightarrow \rho_n(A) \in GL_{2n}(\mathbb{R})$.

Ψ_n samoin. $\square$.

__Tod__ (L.2.1) Voidaan tarkastella rajoittumakuvauksia

$$\rho_n : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_{2n}(\mathbb{R}) \text{ ja}$$

$$\Psi_n : GL_n(\mathbb{H}) \to GL_{2n}(\mathbb{C}), \text{ jotka}$$

ryhmähomomorfismeja.

__Määritelmä__ Olkoon $A \in M_n(\mathbb{H})$. Asetetaan

$$\det(A) := \det(\Psi_n(A)) \in \mathbb{C}.$$

Tällöin pätee $\det(I_n) = 1$, kun $I_n \in M_n(\mathbb{H})$

ja $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det(B)$ $\forall A, B \in M_n(\mathbb{H})$

Lisäksi saadaan:

2.9. __Lause__ $GL_n(\mathbb{H}) = \{A \in M_n(\mathbb{H}) \mid \det A \neq 0\}$.

__Huom__ Voidaan osoittaa: $\forall A \in M_n(\mathbb{H})$ pätee $\det(A) \in \mathbb{R}$ (!)

3. Ortogonaaliset ryhmät

3.1. $\mathbb{K}^n$:n standardi sisätulo

Ol. $\mathbb{K}$ rinnokunta. Alkion q konjugaatti $\bar{q}$ ja normi $|q|$:

(1) jos $q \in \mathbb{R}$, niin $\bar{q} = q$ ja $|q| =$ q:n itseisarvo

(2) Jos $q = a + bi \in \mathbb{C}$, niin $\bar{q} := a - bi$ ja $|q| := \sqrt{a^2 + b^2}$

(3) Jos $q = a + bi + cj + dk$, niin $\bar{q} := a - bi - cj - dk$ ja $|q| := (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}$.

Pätee: $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q_2} \cdot \bar{q_1}$

$q \bar{q} = \bar{q} \cdot q = |q|^2$ (HT)

$\Rightarrow |q_1 \cdot q_2| = |q_1| |q_2|$

Määritelmä: $\mathbb{K}^n$:n standardi sisätulo on funktio

$\langle , \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ s.e.

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle_{\mathbb{K}} := x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

Saadaan heti: $\forall\ \underline{x} \in \mathbb{K}^n$, $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_{\mathbb{K}} \in \mathbb{R}$

$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_{\mathbb{K}} \geq 0$ ja $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_{\mathbb{K}} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = (0, \dots, 0)$

Määritelmä: $\mathbb{K}^n$:n standardi normi

$$|\cdot|_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$|\underline{x}|_{\mathbb{K}} = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_{\mathbb{K}}}.$$

3.1.1 Lause $\forall\ \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z} \in \mathbb{K}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

(1) $\langle \underline{X}, \underline{Y} + \underline{Z} \rangle = \langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle + \langle \underline{X}, \underline{Z} \rangle$

(2) $\langle \underline{X} + \underline{Y}, \underline{Z} \rangle = \langle \underline{X}, \underline{Z} \rangle + \langle \underline{Y}, \underline{Z} \rangle$

(3) $\langle \lambda \underline{X}, \underline{Y} \rangle = \lambda \langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle$, $\langle \underline{X}, \lambda \underline{Y} \rangle = \langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle \overline{\lambda}$

(4) $\overline{\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle} = \langle \underline{Y}, \underline{X} \rangle$

Määritelmä

- $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathbb{K}^n$ ovat ortogonaaliset jos $\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle = 0$
- $\mathbb{K}^n$:n vektorit $\{\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n\}$ ovat ortonormaalit jos $\langle \underline{X}_l, \underline{X}_s \rangle = \delta_{ls} = \begin{cases} 1, & \text{kun } l = s \\ 0, & \text{kun } l \neq s \end{cases}$
- $\mathbb{K}^n$:n standardi (ortonormaali) kanta $e_1 = (1, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 1)$

Kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tavallinen pistetulo vektoreiden $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathbb{R}^n$ välillä. Jos $\measuredangle(\underline{X}, \underline{Y}) = \theta$, niin

$$\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle_{\mathbb{R}} = |\underline{X}|_{\mathbb{R}} |\underline{Y}|_{\mathbb{R}} \cos\theta .$$

Kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ standardi sisätulo = hermiittinen sisätulo $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathbb{C}^n$

$$\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$$

$\mathrm{Re}\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle_{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Im}\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle_{\mathbb{C}}$ geometrinen merkitys?

Ol. $f = f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ identifikaatio luvusta 2.

Tällöin pätee:

$$\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle f(\underline{X}), f(\underline{Y}) \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle f(\underline{X}), f(i\underline{Y}) \rangle_{\mathbb{R}} \qquad (3.1.2.)$$

Lisäksi pätee $|X|_{\mathbb{C}} = |f(X)|_{\mathbb{R}}$ (3.1.3.)

(3.1.2) $\Rightarrow$ Jos $X, Y \in \mathbb{C}^n$ ortogonaaliset, niin

$$\langle f(X), f(Y)\rangle_{\mathbb{R}} = 0 = \langle f(X), f(iY)\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Saadaan:

3.1.4. Lause $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathbb{C}^n$ on ortonormaali kanta

$\iff \{f(X_1), f(iX_1), \dots, f(X_n), f(iX_n)\}$ on $\mathbb{R}^{2n}$:n

ortonormaali kanta.

Kun $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ standardi sisätulo on symplektinen sisätulo

Ol. $X, Y \in \mathbb{H}^n$ ja $h = f_{2n} \circ g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{4n}$ kuten 2 identifikaatio. Nyt pätee:

$$\langle X, Y\rangle_{\mathbb{H}} = \langle h(X), h(Y)\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle h(X), h(iY)\rangle_{\mathbb{R}} + j\langle h(X), h(jY)\rangle_{\mathbb{R}} + k\langle h(X), h(kY)\rangle_{\mathbb{R}} \qquad (3.1.5.)$$

ja $|X|_{\mathbb{H}} = |h(X)|_{\mathbb{R}}$.

3.1.5. Lause $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathbb{H}^n$ on ortonormaali kanta

$\iff \{h(X_1), h(iX_1), h(jX_1), h(kX_1), \dots, h(X_n), h(iX_n), h(jX_n), h(kX_n)\}$

on $\mathbb{R}^{4n}$:n ortonormaali kanta.

3.1.6. Lause (Schwarzin epäyhtälö) $\forall X, Y \in \mathbb{K}^n$

pätee $|\langle X, Y\rangle| \le |X||Y|$.

Tod: Ol. $X, Y \in \mathbb{K}^n$. Aset. $\alpha := \langle X, Y\rangle$. Voi ol. $X \neq 0$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ pätee: $0 \le |\lambda X + Y|^2 = \langle \lambda X + Y, \lambda X + Y\rangle$

$= \lambda\langle \bar{x}, \bar{x}\rangle\bar{\lambda} + \lambda\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle + \langle \bar{y}, \bar{x}\rangle\bar{\lambda} + \langle \bar{y}, \bar{y}\rangle$

$= \lambda^2 |\bar{x}|^2 + \lambda\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle + \overline{\lambda\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle} + |\bar{y}|^2$

$= |\lambda|^2 |\bar{x}|^2 + 2\mathrm{Re}(\lambda\alpha) + |\bar{y}|^2$

Valitsemalla $\lambda = -\bar{\alpha}/|\bar{x}|^2$ saadaan:

$$0 \le \frac{|\alpha|^2}{|\bar{x}|^2} - 2\frac{|\alpha|^2}{|\bar{x}|^2} + |\bar{y}|^2 \Rightarrow |\alpha|^2 \le |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2. \square$$

3.2. Ortogonaalisten ryhmien karakterisointeja

Määritelmä: K-kertoiminen ortogonaalinen ryhmä on

$$O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \langle \bar{x}A, \bar{y}A\rangle = \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{K}^n\}$$

ja merkitään

$O(n)$ = ortogonaalinen ryhmä, kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$U(n)$ = unitaarinen ryhmä, kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$Sp(n)$ = symplektinen ryhmä, kun $\mathbb{K} = \mathbb{H}$

Väite: $O_n(\mathbb{K})$ on $GL_n(\mathbb{K})$:n aliryhmä (HT)

$O_n(\mathbb{K})$:n alkiot ovat ortogonaalisia matriiseja, kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
" unitaarisia " , $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
" symplektisiä " , $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ konjugaattitranspoosi $A^* := (\bar{A})^T$:

jos $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, niin $A^* = (\overline{a_{ji}})$

3.2.1. <u>Lause</u> $\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$ seuraavat ehdot yhtäpitäviä

(1) $A \in O_n(\mathbb{K})$

(2) R_A säilyttää ortonormaalit kannat e. jos $\{\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n\}$ on $\mathbb{K}^n$:n ortonormaali kanta, niin $\{R_A \overline{X}_1, \dots, R_A \overline{X}_n\}$ on " " ".

(3) A:n rivit muodostavat $\mathbb{K}^n$:n ortonormaalin kannan.

(4) $A \cdot A^* = I_n$.

<u>Tod</u>: $(1) \Rightarrow (2)$ selvä

$(2) \Rightarrow (3)$: A:n rivit $= \{R_A(e_1), \dots, R_A(e_n)\}$

$(3) \Leftrightarrow (4)$: $(AA^*)_{ij} = (\text{A:n i:s rivi}) \cdot (\text{A}^*\text{:n j:s sarake})$

$= (\text{A:n i:s rivi}) \cdot (\overline{\text{A:n j:s rivi}})^T = \langle (\text{A:n i:s rivi}), (\text{A:n j:s rivi}) \rangle$

$(3) \Rightarrow (1)$ Jos A:n rivit ortonormaalit, niin $\forall$

$\overline{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $\overline{Y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ pätee:

$$\langle R_A(\overline{X}), R_A(\overline{Y}) \rangle = \left\langle \left(\sum_l x_l a_{l1}, \dots, \sum_l x_l a_{ln}\right), \left(\sum_m y_m a_{m1}, \dots, \sum_m y_m a_{mn}\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_l x_l (\text{A:n l:s rivi}), \sum_m y_m (\text{A:n m:s rivi}) \right\rangle$$

$$= \sum_{l,m=1}^{n} x_l \langle \text{A:n l:s rivi}, \text{A:n m:s rivi} \rangle \overline{y_m}$$

$$\overset{(3)}{=} x_1 \overline{y}_1 + \dots + x_n \overline{y}_n = \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle \quad \square.$$

Geometrisesti: $O(n) \ni A \Rightarrow R_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ säilyttää vektoreiden välisen etäisyyden ja erityisesti siis vektorien normin.