2. Kaikki matriisiryhmät ovat reaalisia

2.1. Lause (1) $GL_n(\mathbb{C})$ on isomorfinen $GL_{2n}(\mathbb{R})$:n aliryhmän kanssa

(2) $GL_n(\mathbb{H})$ on isomorfinen $GL_{2n}(\mathbb{C})$:n aliryhmän kanssa.

Tod: Konstruoimalla injektiiviset homomorfismit

$$\rho_n : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_{2n}(\mathbb{R}) \quad \text{ja}$$

$$\psi_n : GL_n(\mathbb{H}) \to GL_{2n}(\mathbb{C})$$

Huom. Monet tärkeät ryhmät kuitenkin luonnollisempia objekteja $GL_n(\mathbb{H})$:n tai $GL_n(\mathbb{C})$:n aliryhminä kuin $GL_m(\mathbb{R})$:n aliryhminä. ⇒ Tapauksia $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ tarvitaan!

Esim. Matriisi $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ vastaa lin. kuvausta $R_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka on tason kierto posit. kiertosuuntaan kulman θ verran:

Napakoordinaateissa $(x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$:

$$R_B(x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= (r\cos\phi\cos\theta - r\cos\phi\sin\theta,\ r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta)$$

$$= (r\cos(\phi+\theta), r\sin(\phi+\theta)).$$

Vastaavasti Matriisi $A = (e^{i\theta}) \in M_1(\mathbb{C})$ on tason kierto kuten yllä: $R_A : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$, $z = re^{i\phi}$

$R_A(z) = z \cdot A = re^{i(\phi+\theta)}$, joten A ja B esittävät saman tason liikettä.

<u>Tehtävä</u>: Konstruoi funktio $S_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$ s.e. $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ vastaa 'saman avaruuden $\mathbb{C}^n$ liikettä' kuin kuin $B = S_n(A) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ avaruudessa $\mathbb{R}^{2n}$.

Kiinnitetään samastus $f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ asettamalla

$$f_n(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) := (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$$

Määriteltävä S_n s.e. <u>kaavio</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{S_n(A)}"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd} \qquad (2.2.)$$

<u>kommutoi</u> eli pätee: $R_{S_n(A)} \circ f_n = f_n \circ R_A$.

Kun $n = 1$ saadaan esimerkin tapauksessa

$$A = (e^{i\theta}) = \cos\theta + i\sin\theta = a + ib \in M_1(\mathbb{C}) \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

joten kannattaa asettaa

$$S_1(a+bi) := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Tällöin kaavio

$$\begin{array}{ccc}
x+iy = z \in \mathbb{C} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \\
M_1(\mathbb{C}) \ni A = (a+ib) \quad R_A \downarrow & & \downarrow R_{\rho_1(A)} \qquad \rho_1(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \\
R_A z = (ax-by+i(bx+ay)) \in \mathbb{C} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^2 \ni R_{\rho_1(A)}(x,y) = (xa-by, xb+ay)
\end{array}$$

kommutoi.

Yleisesti: $\forall\ A \in M_n(\mathbb{C})$ kun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & \cdots & a_{1n}+ib_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1}+ib_{n1} & \cdots & a_{nn}+ib_{nn} \end{pmatrix}$$

asetetaan $\rho_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$

$$\rho_n(A) := \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{1n} \\ -b_{11} & a_{11} & \cdots & -b_{1n} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_{nn} \\ -b_{n1} & a_{n1} & \cdots & -b_{nn} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

HT: osoita, että kaavio (2.2) kommutoi.

Huom: Kuvauksen ρ_n määrääminen riippuu samastuksesta $f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$.

HT: Määrää ρ_n kun aset. $f_n(x_1+iy_1, \ldots, x_n+iy_n) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.

2.3. <u>Lause</u>: $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ ja $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pätee:

$$(1) \quad \rho_n(\lambda A) = \lambda \rho_n(A)$$

$$(2) \quad \rho_n(A+B) = \rho_n(A) + \rho_n(B)$$

$$(3) \quad \rho_n(A \cdot B) = \rho_n(A) \cdot \rho_n(B)$$

ts. (1), (2) ρ_n $\mathbb{R}$-lineaarinen
(3) ρ_n ryhmähomomorfismi

<u>Tod</u>: (1), (2) selvät

(3):

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \in \mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{\rho_n(A)}"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_B"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{\rho_n(B)}"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2n}
\end{tikzcd}$$

Pätee: $R_{\rho_n(B)} \circ R_{\rho_n(A)} (f_n \underline{X}) = R_{\rho_n(B)} (f_n \underline{X} \cdot \rho_n(A))$

$= f_n \underline{X} \cdot \rho_n(A) \cdot \rho_n(B) = R_{\rho_n(A)\rho_n(B)}(f_n \underline{X})$

Toisaalla: $R_B \circ R_A(\underline{X}) = R_B(\underline{X}A) = \underline{X}AB = R_{AB}(\underline{X})$.

Koska kaavio kommutoi, niin pätee

$f_n \circ R_{AB} = R_{\rho_n(A)\rho_n(B)} \circ f_n$, josta
f_n bij. $\Rightarrow$
$\rho_n(AB) = \rho_n(A)\rho_n(B)$. $\square$.

Huom: $\mathcal{S}_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$ on injektio:

$$\mathcal{S}_n(A)=\mathcal{S}_n(B) \Rightarrow f_n(R_A(\underline{X})) \overset{\text{komm. kaavio}}{=} R_{\mathcal{S}_n(A)}(f_n\underline{X})$$

$$= R_{\mathcal{S}_n(B)}(f_n\underline{X}) = f_n(R_B(\underline{X})) \quad \forall\, \underline{X}\in\mathbb{C}^n$$

f_n bijektio $\Rightarrow R_A(\underline{X}) = R_B(\underline{X}) \quad \forall\, \underline{X}\in\mathbb{C}^n \Rightarrow A=B$.

Selvästi $\mathcal{S}_n$ ei ole surjektio.

Määritelmä Matriisi $A\in \mathcal{S}_n(M_n(\mathbb{C})) \subset M_{2n}(\mathbb{R})$ on kompleksilineaarinen matriisi.

2.4. Lause $B\in M_{2n}(\mathbb{R})$ on kompleksilineaarinen jos ja vain jos kuvaus $f_n^{-1}\circ R_B \circ f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ on $\mathbb{C}$-lineaarinen kuvaus □.

Huom kuvaus $F := f_n^{-1}\circ R_B\circ f_n$ on $\mathbb{R}$-lineaarinen kun $\mathbb{C}^n$ tulkitaan $\mathbb{R}$-kertoimiseksi vaikeksi.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \\ & & \downarrow R_B \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

F $\mathbb{C}$-lineaarinen $\Leftrightarrow F(i\underline{X}) = iF(\underline{X}) \quad \forall\, \underline{X}\in\mathbb{C}^n$

Aset. $J_{2n} := \mathcal{S}_n(i\cdot I_n) = \mathcal{S}_n\underbrace{\begin{pmatrix} i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\end{pmatrix}}_{\in M_n(\mathbb{C})} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}\end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$

Nyt pätee:

$J_{2n}^2 = -I_n$ ja kaavio

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \\ R_{i\cdot I}\downarrow & & \downarrow R_{J_{2n}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

kommutoi.

Matriisi J_{2n} on $\mathbb{R}^{2n}$:n <u>standardi kompleksistruktuuri</u>.

$R_{J_{2n}}$ imitoi $\mathbb{C}^n$:n i:llä kertomista $\mathbb{R}^{2n}$:ssä.

2.5. <u>Lause</u> $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ on kompleksilineaarinen

$$\iff B \cdot J_{2n} = J_{2n} \cdot B$$

<u>Tod</u> "$\Rightarrow$" $\exists\ A \in M_n(\mathbb{C})$ s.e. $B = \rho_n(A)$ ja kaavio

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \in \mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_{iI}"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{J_{2n}}"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_B"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_{iI}"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{J_{2n}}"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2n}
\end{tikzcd}$$

kommutoi.

Näet: $(R_{iI} R_A R_{iI})(\overline{X}) = (R_{iI} R_A)(i\overline{X}) = R_{iI}(i\overline{X}A) = -\overline{X}A$

$= R_{-A}\overline{X} \quad \forall\, \overline{X} \in \mathbb{C}^n$

Kaaviosta saadaan:

$$R_{J_{2n}} \circ R_B \circ R_{J_{2n}} = R_{\rho_n(-A)} = R_{-\rho_n(A)} = R_{-B}.$$

$\Rightarrow R_{-B}(f_n(\overline{X})) = R_{J_{2n}}(R_B(f_n(\overline{X})J_{2n}))$

$= R_{J_{2n}}(f_n(\overline{X})J_{2n}B) = f_n(\overline{X})J_{2n}BJ_{2n} = R_{J_{2n}BJ_{2n}}(f_n(\overline{X})) \quad \forall \overline{X} \in \mathbb{C}^n$

$J_{2n}^2 = -I$

$\Rightarrow -B = J_{2n}BJ_{2n} \Rightarrow BJ_{2n} = J_{2n}B.$

"$\Leftarrow$" HT $\square$.