Lien ryhmät ja monistot (Mat-1.3531)

Peltonen / Dahl

Harj. 6.
3.8.2006

1) Olkoon G d-ulotteinen matriisiryhmä. Osoita, että kuvaus $Ad: G \to GL_d(\mathbb{R})$ on sileä.

2) Olkoot G_1, G_2 matriisiryhmiä, joiden Lien algebrat ovat $\mathfrak{g}_1$ ja $\mathfrak{g}_2$. Olkoon $f: G_1 \to G_2$ sileä homomorfismi. Jos $df_I: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ on bijektio, niin osoita, että myös $df_g: T_g G_1 \to T_{f(g)} G_1$ on bijektio kaikilla $g \in G_1$.

3) Osoita, että $SO(3)$ on epäkommutatiivinen

a) Etsimällä $so(3)$:lta alkiot, jotka eivät kommutoi

b) Etsimällä $SO(3)$:lta " " " " .

c) Osoita, että $SO(n)$ ei ole kommutatiivinen milloin $n > 2$.

4) Onko matriisiryhmillä $SO(3)$ ja $Isom(\mathbb{R}^2)$ isomorfiset Lien algebrat?

5) Olkoot G_1, G_2 matriisiryhmiä, joiden Lien algebrat ovat $\mathfrak{g}_1$ ja $\mathfrak{g}_2$. Olkoon $f: G_1 \to G_2$ C^1 homomorfismi. Osoita, että kaikilla $v \in \mathfrak{g}_1$ pätee

$$f(e^v) = e^{df_I(v)}.$$

Päättele tämän avulla, että jokainen C^1 homomorfismi on sileä I alkion ympäristössä.

6) Muodosta diffeomorfismi $T^1 G \to G \times S^{d-1}$, kun G on d-ulotteinen matriisiryhmä. Tarkastele erityisesti tapausta $G = S^3$.