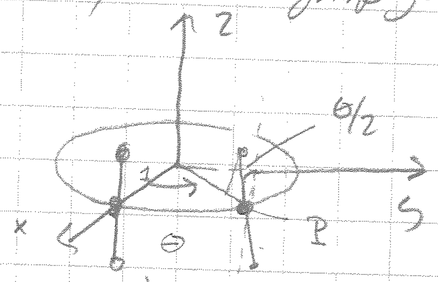
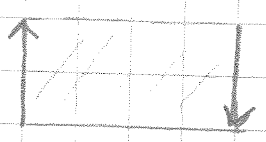
Esim 1° Möbiuksen nauha: alkutilassa z-akselin suuntainen jana $\{(1,0,t) \mid t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ "pyörähtää" kulman π keskipisteen P (alkutilassa $P=(1,0,0)$) suhteen pisteen P liikkuessa pitkin ympyrää $\{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$.



Parametrisointi $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(t,\theta) = \left((1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\cos\theta,\ (1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\sin\theta,\ t\cos\tfrac{\theta}{2} \right)$$



$$U = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \times (0, 2\pi)$$

$\tilde{\sigma}: \tilde{U} \to \mathbb{R}^3 \qquad \tilde{U} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\pi, \pi) \qquad \tilde{\sigma} = \sigma$

$\{(\sigma, U), (\tilde{\sigma}, \tilde{U})\}$ on Möbiuksen nauhan kartasto (sileä. HT)

$$\sigma_t = \left(-\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\theta,\ -\sin\tfrac{\theta}{2}\sin\theta,\ \cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_\theta = \left(-\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\cos\theta - (1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\sin\theta,\ -\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\theta + (1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\cos\theta,\ -\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\right) \underset{t=0}{\overset{\text{pist.}}{=}} (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Pist. $t=0$:

$$\sigma_t \times \sigma_\theta = \left(-\cos\tfrac{\theta}{2}\cos\theta,\ -\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\theta,\ -\sin\tfrac{\theta}{2}\right)$$

$$\|\sigma_t \times \sigma_\theta\| = \cos^2\tfrac{\theta}{2}\cos^2\theta + \cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin^2\theta + \sin^2\tfrac{\theta}{2} = 1$$

$$\Rightarrow N_\sigma(0,\theta) = \left(-\cos\tfrac{\theta}{2}\cos\theta,\ -\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\theta,\ -\sin\tfrac{\theta}{2}\right)$$

Kuitenkin $N_\sigma(0,0) = (-1,0,0) \neq (1,0,0) = N_\sigma(0,2\pi)$

pisteessä $P = (1,0,0) = \sigma(0,0) = \sigma(0,2\pi)$

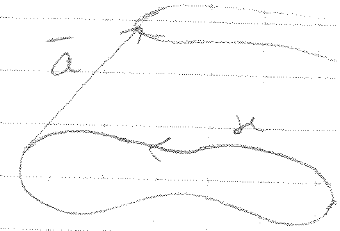
Siis: möbiuksen nauha ei ole suunnistuva.

2° yleistetty sylinteri siirtämällä käyrää : II 1.(

Ol. $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ ja $\bar{a}$ yksikkövektori

$\sigma : \sigma(u,v) = \gamma(u) + v\bar{a}$, $U \to \mathbb{R}^3$

$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < u < \beta\}$



Selvästi σ sileä jos γ sileä, lisäksi

$\sigma(u,v) = \sigma(u',v') \Leftrightarrow \gamma(u) - \gamma(u') = (v' - v)\bar{a}$,

joten σ injektio $\Leftrightarrow$ $\bar{a}$:n suuntainen suora (*)

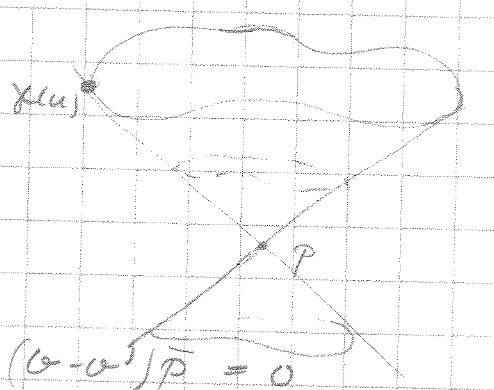
kohtaa γ:n täsmälleen yhdessä pisteessä.

$\sigma_u = \gamma'$, $\sigma_v = \bar{a}$ $\Rightarrow$ $\sigma_u \times \sigma_v = \gamma' \times \bar{a}$, joten

σ sään $\Leftrightarrow$ γ sään ja $\gamma'(u) \nparallel \bar{a}$ $\forall u$ ja (*)

3° yleistetty kartio $= \bigcup_{u \in (\alpha,\beta)} sp\{\gamma(u) - \bar{p}\}$, $\bar{p} \in \mathbb{R}^3$

ja $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$.



$\sigma(u,v) = (1-v)\bar{p} + v\gamma(u)$

σ sileä jos γ on

$\sigma(u,v) = \sigma(u',v') \Leftrightarrow v\gamma(u) - v'\gamma(u') + (v - v')\bar{p} = 0$

$\Leftrightarrow$ vektorit $\gamma(u), \gamma(u'), p$ samalla suoralla

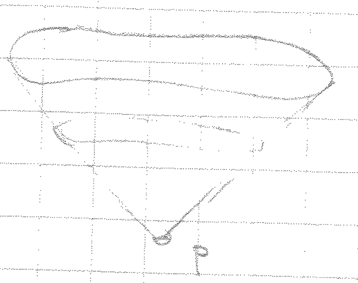
Saatiin: σ injektio $\Leftrightarrow$ $sp\{\gamma(u) - \bar{p}\}$ sisältää täsmälleen

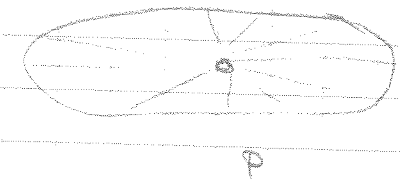
yhden γ:n pisteen. (*)

$\sigma_u = v\gamma'$, $\sigma_v = -\bar{p} + \gamma$ $\Rightarrow$

$\sigma_u \times \sigma_v = -v\,\gamma' \times \bar{p} + v\,\gamma' \times \gamma = v\,\gamma' \times (\gamma - \bar{p})$

saatiin: σ sään. $\Leftrightarrow$ γ sään., $v \neq 0$, $\gamma' \nparallel \gamma - \bar{p}$ ja (α).



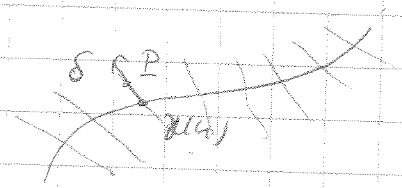


Edellisen yleistys:

4° <u>viivoitinpinta</u> $S = \bigcup_{u \in (\alpha,\beta)} L_{\gamma(u)}$, missä $\gamma : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$

ja $L_{\gamma(u)}$ on pisteen $\gamma(u)$ kautta kulkeva suora.

oe. $\gamma(t) \cap L_{\gamma(u)} \neq \emptyset \Leftrightarrow t = u$



$\forall\ p \in S\ \exists_1\ L_{\gamma(u)}$ s.e. $p \in L_{\gamma(u)}$

merk. $0 \neq \delta(u) \parallel \mathrm{sp}\{p - \gamma(u)\}$

$\sigma(u,v) := \gamma(u) + v\,\delta(u)$, $v \in \mathbb{R}$

σ sileä kun γ, δ sileitä

$\sigma_u = \gamma' + v\delta'$, $\sigma_v = \delta$

$\Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v = \gamma' \times \delta + v\,\delta' \times \delta = (\gamma' + v\delta') \times \delta$

σ sään. $\Leftrightarrow$ $\gamma' + v\delta'$, δ lin. riippumattomia

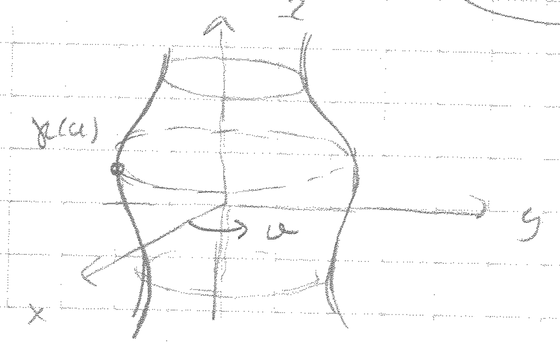
Erityisesti σ sään. kun γ', δ lin. riippumattomia ja v riitt. pieni.

5° <u>pyörähdyspinta</u> saadaan kun tasokäyrä (profiilikäyrä) pyörähtää samassa tasossa olevan suoran ympäri.

Ol. pyörähdysakseli = z-akseli ja tasokäyrä $\boxed{\text{II } 1.12}$

$\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2 = xz$-taso

on muotoa $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$



Parametrisointi

$$\sigma(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$$

$$\sigma_u = (f'(u)\cos v,\ f'(u)\sin v,\ g'(u))$$

$$\sigma_v = (-f(u)\sin v,\ f(u)\cos v,\ 0)$$

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-g'(u)f(u)\cos v,\ -f(u)g'(u)\sin v,\ f'(u)f(u))$$

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = g'^2 f^2 + f'^2 f^2 = (g'^2 + f'^2) f^2$$

$\neq 0$ kun $f(u) \neq 0 \neq g'^2(u) + f'^2(u) \quad \forall u$

Voi ol. $f(u)$ (= pisteen $\sigma(u,v)$ etäisyys z-akselista) > 0

σ injektio kun γ injektio ja $v \in (\alpha, \beta)$ $\beta - \alpha \in (0, 2\pi)$

Käänteiskuvauslauseen soveltamisesta:

Ol. $f: U \to \mathbb{R}^n$ C^∞, $U \subset_o \mathbb{R}^m$ ja

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

lin. kuvauksen $(Df)(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ esitysmatriisi $\mathbb{R}^m$:n ja $\mathbb{R}^n$:n standardikantojen suhteen pisteessä $x \in U$.

Tällöin pätee käänteiskuvauslause: Ol $n = m$.

Jos $(Df)(x_0)$ on kääntyvä jollakin $x_0 \in U$ ($\Leftrightarrow$ $J(f(x_0)) = \det (Df)(x_0) \neq 0$) niin löytyy avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ ja sileä kuvaus $g: V \to \mathbb{R}^n$ s.e. pätee:

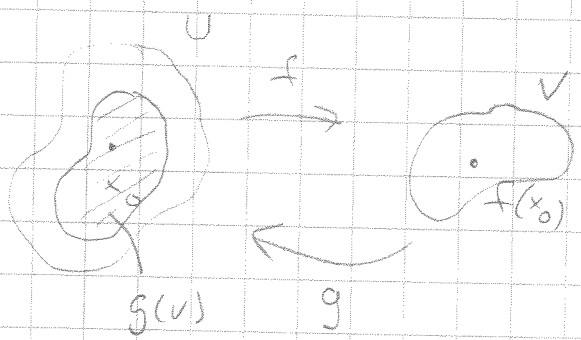
(1) $y_0 = f(x_0) \in V$

(2) $g(y_0) = x_0$

(3) $g(V) \subset U$

(4) $g(V) \subset_o \mathbb{R}^n$

(5) $f(g(y)) = y \quad \forall y \in V$



Erityisesti siis $g: V \to g(V)$, $f: g(V) \to V$ ovat toistensa käänteiskuvauksia.

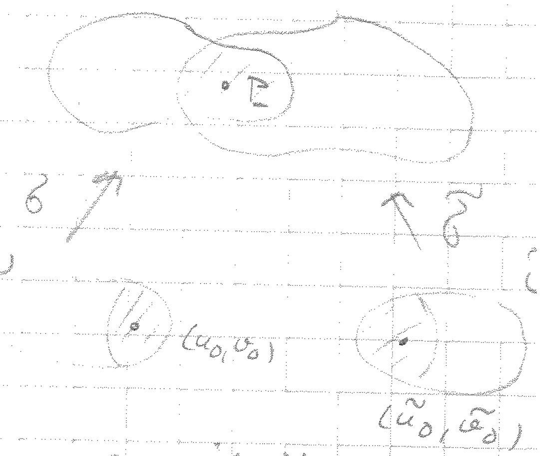
Osoitetaan tämän avulla:

1.5. Lause Sileän pinnan transitiofunktiot ovat sileitä.

Tod: Ol. $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ sileän parametrisointeja

ja $\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U}) \neq \emptyset$

ol. $\sigma(u_0, v_0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = P$



Merk. $\sigma(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$

$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \Rightarrow$

$$D\sigma = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix} = (\sigma_u \ \sigma_v) \text{ ja } \operatorname{Rank}(D\sigma) = 2$$

$\Rightarrow \forall (u,v)$ jokin matriiseista $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$ on kääntyvä $\left(\sigma_u \times \sigma_v = \left(\begin{vmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} f_u & h_u \\ f_v & h_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{vmatrix} \right)\right)$

Voi ol. $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$ kääntyvä pisteessä P.

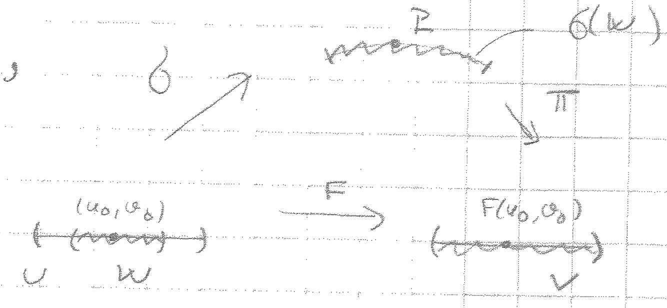
Sovelletaan käänteiskuvauslausetta funktioon

$F : U \to \mathbb{R}^2 \qquad F(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$.

$\Rightarrow$ löytyy $V \subset_o \mathbb{R}^2$ s.e. $F(u_0, v_0) \in V$ ja
$W \subset_o U$ s.e. $F : W \to V$ bijektio
ja $F^{-1} : V \to W$ sileä.

$\sigma|_W : W \to \sigma(W)$ bijektio $\Rightarrow$ projektio $\pi : \sigma(W) \to V$

$\pi(x,y,z) = (x,y)$ bijektio,



sillä pätee $\pi \circ \sigma|_W = \pi \circ (f,g,h)|_W$

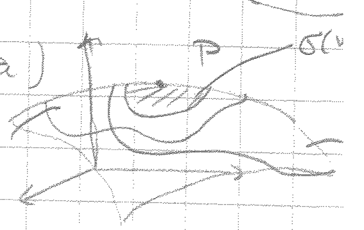
$= (f,g)|_W = F|_W$

joten $\overline{\pi} = F|_W \circ \sigma|_W^{-1}$ bij. Voi ol. $\sigma(W) \subset \tilde{U}$. II 1.13

$$\tilde{W} := \tilde{\sigma}^{-1}\underbrace{(\sigma(W))}_{\subset_\circ S \ (\sigma \text{ jva bij.})} \subset_\circ \tilde{U} \qquad (\tilde{\sigma} \text{ jva})$$

Lisäksi

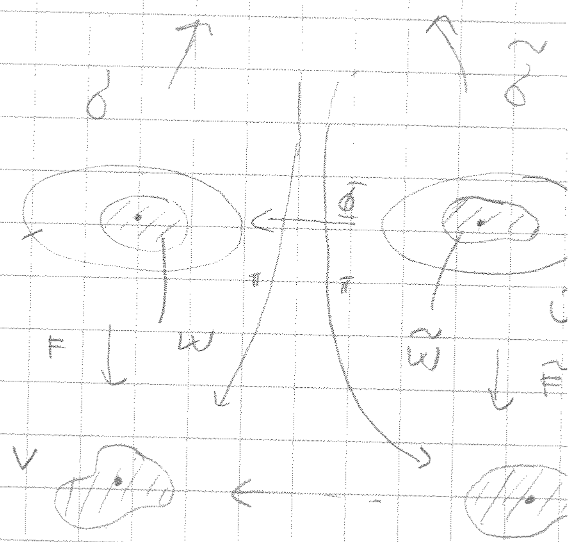
$\sigma(U)$



$$\Phi := \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}|_{\tilde{W}} = F^{-1} \circ \tilde{F}|_{\tilde{W}},$$

missä $\tilde{F} = \pi \circ \tilde{\sigma}$ sileä $\tilde{W}$:ssä

$\Rightarrow$ väite. □



1.6. Lause

Ol. $S \subset \mathbb{R}^3$ s.e. $\forall P \in S$

$\exists W \subset_\circ \mathbb{R}^3$, $P \in W$ ja sileä $f : W \to \mathbb{R}$ s.e.

(i) $S \cap W = \{(x,y,z) \in W \mid f(x,y,z) = 0\}$

(ii) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right) \neq 0$

Tällöin S on säänn. pinta

Tod: Ol. $P = (x_0, y_0, z_0)$. Voi ol $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$. Aset $F : W \to \mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z))$ (jos $f_x \neq 0$ aset $F(x,y,z) = (f(x,y,z), y, z)$
" $f_y \neq 0$ " " $(x, f(x,y,z), z)$)

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

ja $DF(P)$ kääntyvä, sillä $f_z(P) \neq 0$.

KKL $\Rightarrow$ $\exists V \subset_\circ \mathbb{R}^3$ s.e. $F(P) = (x_0, y_0, 0) \in V$ ja

sileä $G : V \to W$ s.e. $\tilde{W} = G(V) \subset_\circ \mathbb{R}^3$ ja

$F : \tilde{W} \to V$, $G : V \to \tilde{W}$ toistensa käänteiskuvauksia.

II 1.16

$V \subset_o \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists\, U_1 \subset_o \mathbb{R}^2,\ U_2 \subset_o \mathbb{R}$

s.e. $(x_0, y_0) \in U_1$, $0 \in U_2$ s.e.

$U_1 \times U_2 \subset V$

Voidaan ol. $V = U_1 \times U_2$

Pätee $G(x,y,w) = (x, y, g(x,y,w))$

jollakin $g : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ ja

$f(x,y,g(x,y,w)) = w \quad \forall (x,y) \in U_1,\ w \in U_2$.

Aset. $\sigma : U_1 \to \mathbb{R}^3$ $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y,0))$

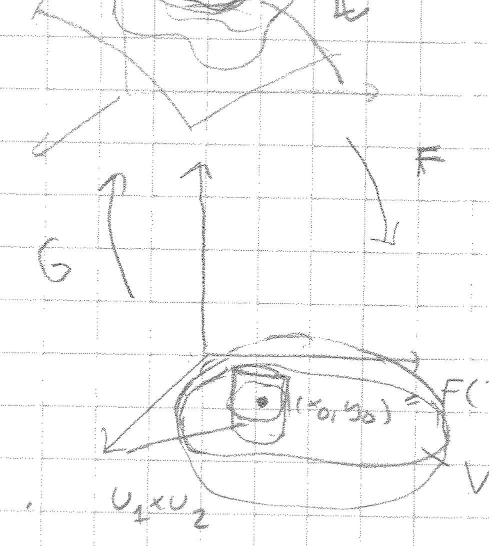
σ homeomorfismi kuvajoukolleen $\sigma(U_1) = S \cap \tilde{W}$

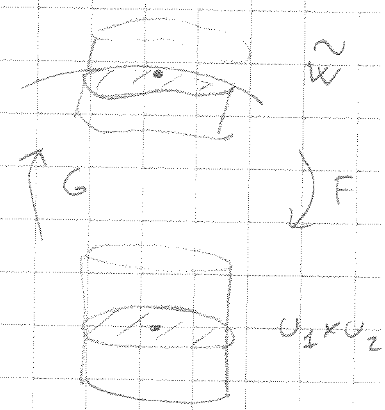
$\sigma^{-1} = \pi|_{S\cap\tilde{W}}$ $\pi(x,y,z) = (x,y)$

σ sään.: sileys selvä,

$\sigma_x = (1, 0, g_x)$ $\sigma_y = (0, 1, g_y)$

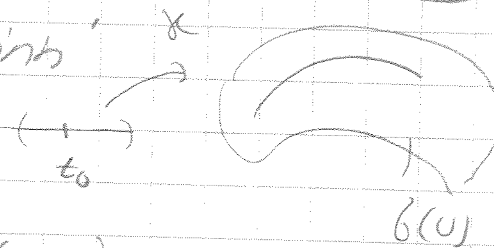
$\sigma_x \times \sigma_y = (-g_x, -g_y, 1) \neq 0$. □





2. Ensimmäinen perusmuoto

Ol. $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ sään. parametrisointi



ja $\gamma : (\alpha, \beta) \to \sigma(U)$ sen polku

$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$. Olk. $t_0 \in (\alpha, \beta)$

polun kaarenpituus $s = \ell(\gamma|_{[t_0, t]}) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tilde{t})\| \, d\tilde{t}$

ketjus. $\Rightarrow \gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$

$$\Rightarrow \|\gamma'\|^2 = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_u u' + \sigma_v v')$$

$$= \sigma_u \cdot \sigma_u u'^2 + 2\sigma_u \cdot \sigma_v u' v' + \sigma_v \cdot \sigma_v v'^2$$

$$=: E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2$$

Saatiin $s = \int_{t_0}^{t} (E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2)^{1/2} \, dt$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(E(u' dt)^2 + 2F u' v' dt^2 + G(v' dt)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \int_{\gamma} (E \, du^2 + 2F \, du \, dv + G \, dv^2)^{1/2}$$

$$= \int_{\gamma} \sqrt{ds^2} \qquad (!)$$

Lauseke $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ on parametrisointiin σ liittyvä ensimmäinen perusmuoto

ds^2 (tai paremminkin ds) antaa pinnan metriikan kaarenpituuselementin.

Huom ds^2 määrää myös metriikan $\sigma(U)$:lle

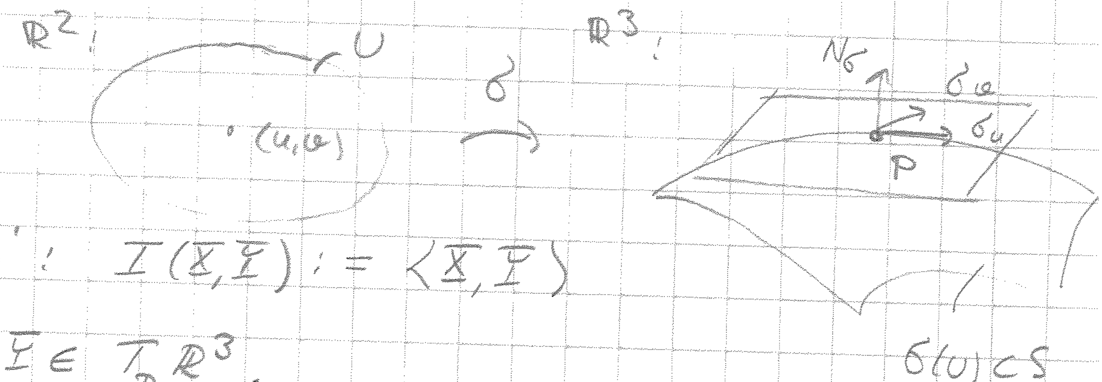
$d(p,q) = \inf_{\gamma} \{ \ell(\gamma) \mid \gamma$ pisteet $p, q \in \sigma(U)$ yhdistävä polku $\gamma : (\alpha, \beta) \to \sigma(U)$

Ensimmäisen perusmuodon tutkinta parametriperheenä

sisätuloja $I : p \mapsto I_p$, $I_p = \langle\, , \,\rangle_p$, missä $\langle\, , \,\rangle_p$

avaruuden $T_p\mathbb{R}^3 = sp\{\sigma_u, \sigma_v, N_\sigma\}$ $p = \sigma(u,v)$

sisätulon $\langle\, , \,\rangle$ ($\mathbb{R}^3$:n euklidinen sisätulo: $\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle = \bar{X} \cdot \bar{Y}$, $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathbb{R}^3$) rajoittuma tangenttiavaruuteen T_pS.



Merk. lyhyesti: $I(\bar{X}, \bar{Y}) := \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle$

$\forall\, \bar{X}, \bar{Y} \in T_p\mathbb{R}^3$.

I indusoi symmetrisen bilineaarimuodon myös pisteeseen $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ liittyvään tangenttiavaruuteen $T_{(u,v)}U \simeq \mathbb{R}^2$ parametrisoinnin σ välityksellä: $\forall\, v, w \in T_{(u,v)}U$

$$I_{(u,v)} : (v,w) \mapsto \langle D\sigma(u,v)v,\ D\sigma(u,v)w \rangle = \langle \underbrace{(D\sigma(u,v))^T D\sigma(u,v)}_{=:\, g_{ij}(u,v)} v,\ w \rangle$$

Jos $v = (v^1, v^2)$, $w = (w^1, w^2) \in T_{(u,v)}U$

niin merk. $I_{(u,v)}(v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u,v)\, v^i w^j$,

missä $(g_{ij}(u,v))$ 2×2 matriisi. Etsitään tämän matriisin esitys $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$:n välittämissä koordinaateissa

$$g_{ij} = D\sigma^T D\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u^1 & \sigma_v^1 \\ \sigma_u^2 & \sigma_v^2 \\ \sigma_u^3 & \sigma_v^3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\sigma_u^1)^2 + (\sigma_u^2)^2 + (\sigma_u^3)^2 & \sigma_u^1\sigma_v^1 + \sigma_u^2\sigma_v^2 + \sigma_u^3\sigma_v^3 \\ \sigma_v^1\sigma_u^1 + \sigma_v^2\sigma_u^2 + \sigma_v^3\sigma_u^3 & (\sigma_v^1)^2 + (\sigma_v^2)^2 + (\sigma_v^3)^2 \end{pmatrix}$$

positiivinen symmetrinen 2×2 matriisi

Voidaan kirjoittaa:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} I(\sigma_u, \sigma_u) & I(\sigma_u, \sigma_v) \\ I(\sigma_v, \sigma_u) & I(\sigma_v, \sigma_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad (u,v) \mapsto E(u,v),\ F(u,v),\ G(u,v)$$ kuten edellä

Sanotaan: Matriisi (g_{ij}) on parametrisointiin σ liittyvä metrinen tensori.

Huom neliömuoto $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ operoi vektorikenttiin: $V = (V^1, V^2) \overset{\text{merk}}{=} V^1 \frac{\partial}{\partial u} + V^2 \frac{\partial}{\partial v}$ ja $W = W^1 \frac{\partial}{\partial u} + W^2 \frac{\partial}{\partial v}$, missä $T_{(u,v)}U = sp\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$ ja $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ merkintä koordinaatien u, v suuntaisille yksikkövektoreille.

$$ds^2(V,W) = E du^2(V,W) + 2F du dv(V,W) + G dv^2(V,W)$$

$$:= E V^1 W^1 + F(V^1 W^2 + W^1 V^2) + G V^2 W^2$$

Tämä vastaa matriisioperaatiota

$$\left\langle \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} EV^1 + FV^2 \\ FV^1 + GV^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= E V^1 W^1 + F(V^2 W^1 + V^1 W^2) + G V^2 W^2.$$

Esim 1° Jos $\bar{p} \perp \bar{q}$ $\|\bar{p}\| = \|\bar{q}\| = 1$ niin $\sigma(u,v) = \bar{a} + u\bar{p} + v\bar{q}$ on pisteen $\bar{a}$ kautta kulkevan tason $sp\{\bar{p}, \bar{q}\}$ suuntaisen tason parametrisointi.

II 2.

$\sigma_u = \bar{p}, \ \sigma_v = \bar{q} \qquad \sigma_u \times \sigma_v = \bar{p} \times \bar{q} \quad \Rightarrow \ \sigma$ sään.

$$\left.\begin{aligned} E &= \sigma_u \cdot \sigma_u = \|\bar{p}\|^2 = 1 \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = \bar{p} \cdot \bar{q} = 0 \\ G &= \sigma_v \cdot \sigma_v = \|\bar{q}\|^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{1. perusmuoto} = du^2 + dv^2$$

2° Pallo $\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$

$\sigma_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\sigma_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$

$E = \sigma_\theta \cdot \sigma_\theta = \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = \underline{1}$

$F = \sigma_\theta \cdot \sigma_\varphi = \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi - \sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi = 0$

$G = \sigma_\varphi \cdot \sigma_\varphi = \cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi = \cos^2\theta$

$\Rightarrow$ 1. perusmuoto $\quad d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\varphi^2$

3° Yleistetty sylinteri $\quad \sigma(u, v) = \gamma(u) + v\bar{a}$

Ol. $\|\gamma'\| = 1, \ \|\bar{a}\| = 1 \quad |\gamma| \subset$ taso $\perp \bar{a}$

$\sigma_u = \gamma', \quad \sigma_v = \bar{a}$

$$\left.\begin{aligned} E &= \|\sigma_u\|^2 = \|\gamma'\|^2 = \underline{1} \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = \gamma' \cdot \bar{a} = 0 \\ G &= \|\sigma_v\|^2 = \|\bar{a}\|^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{1. perusmuoto} = du^2 + dv^2 \text{ kuten taso!}$$

4° Yleistetty kartio $\quad \sigma(u, v) = (1-v)\bar{p} + v\gamma(u)$

Voi ol. $\bar{p} = 0$ (siirto ei vaikuta 1. perusmuotoon (HT))

ja $\|\gamma(u)\| = 1$ (Valitaan γ uudestaan leikkaamalla kartio yksikköpallolla)

γ sään $\|\gamma'\| = 1$.