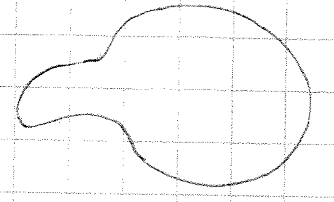
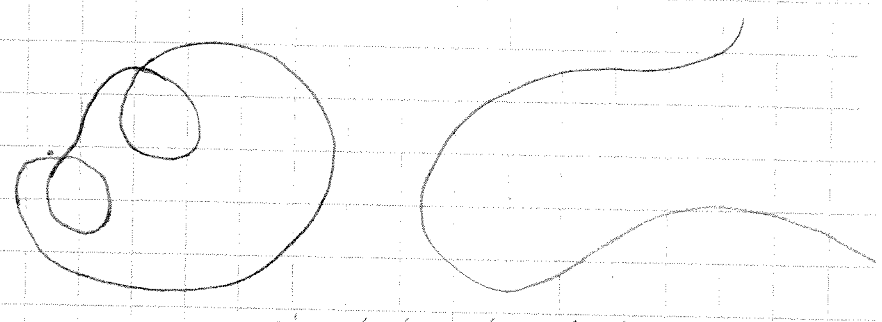
3. Tasokäyrien globaalia teoriaa

Määritelmä 4 Ol. $a>0$. a-jaksoinen yksinkertainen suljettu polku $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ on säännöllinen polku c s.e. $c(t)=c(t') \iff t'-t=ka$ jollakin $k\in\mathbb{Z}$.



yksinkertainen suljettu



ei yksinkert. suljettu

Ol. tunnetuksi Jordanin käyrälause: Yksinkertainen suljettu tasopolku c jakaa $\mathbb{R}^2$:n kolmeen pistevieraaseen osaan

(i) $|c|$ polun jäljen pisteet

(ii) int c rajoitettu alue, jonka reuna on $|c|$

(iii) ext c rajoittamaton alue, — " —

Huom (1) alue = avoin ja yhtenäinen

(2) avoimella joukolla D yhtenäisyys = polkuyhtenäisyys: $\forall\, x,y\in D$ $\exists$ polku $c:[a,b]\to D$ s.e. $c(a)=x$, $c(b)=y$.

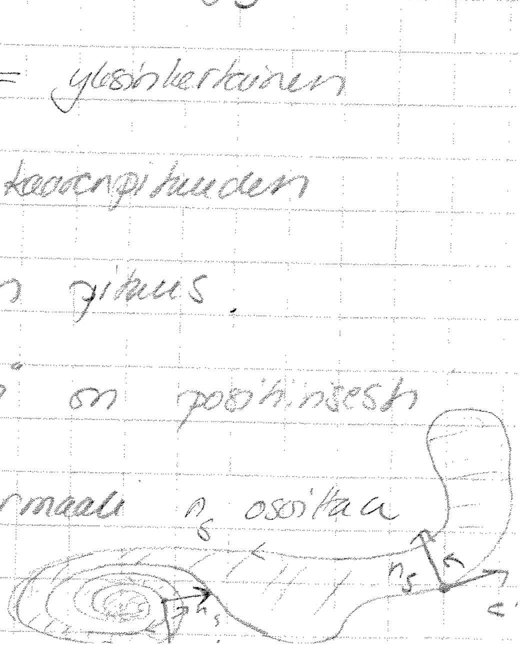
(3) Jordanin käyrälauseen tarkka todistus:

Munkres: Topology

Wall: Geometric introduction to topology

Sopimus: yksinkertainen suljettu käyrä = yksinkertainen suljettu polku, joka parametrisoitu kaarenpituuden suhteen ja sen pituus = jakson pituus.

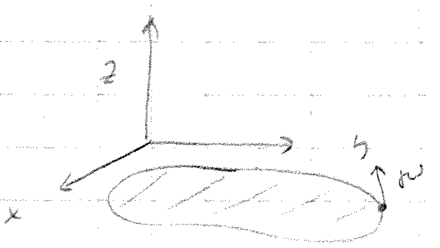
Sanotaan: yksinkertainen suljettu käyrä on positiivisesti suunnistettu, jos sen suunnistettu normaali n_s osoittaa int(c):n $\forall\, t$.



<u>Muistutus</u> (L2): alueen int(γ) pinta-ala: (3.2.)

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \iint_{\mathrm{int}\,\gamma} dx\,dy$$

Greenin kaava (L2): $\displaystyle\iint_{\mathrm{int}(\gamma)} (\nabla \times \bar{F})\cdot \bar{k}\, dx\,dy = \int_{\gamma} \bar{F}\cdot d\bar{r}$, missä



$\bar{k}$ z:n suuntainen yksikkövektori

$d\bar{r} = \gamma'(t)\,dt$, $\bar{F} = (f_1, f_2)$

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\bar{k}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathrm{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\gamma} (f_1, f_2)\cdot \gamma'(t)\,dt = \int_{\gamma} f_1\,dx + f_2\,dy,$$

missä $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\quad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))\,dt = (dx, dy)$

<u>Valitsemalla</u> $\bar{F} = (f_1, f_2)$ s.e. $\nabla \times \bar{F} \equiv \bar{k}$ saadaan

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \int_{\gamma} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

a) valinta $\bar{F} = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$ $\quad (\nabla \times \bar{F} = (\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}))\bar{k} = \bar{k}$

antaa $\displaystyle A(\mathrm{int}\,\gamma) = \frac{1}{2}\int_{\gamma} (-y)\,dx + x\,dy$

(3.1) $$= \frac{1}{2}\int_0^L (x y' - y x')\,dt$$

kun $\gamma: [0, L] \to \mathbb{R}^2$.

b) Voidaan valita yleisemmin $\bar{F} = (-cy, (1-c)x)$ $c \in \mathbb{R}$

jolloin $\nabla \times \bar{F} = ((1-c) - (-c))\bar{k} = \bar{k}$ ja

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \int_{\gamma} (-cy)\,dx + (1-c)x\,dy = \int_0^L (-cyx' + (1-c)xy')\,dt$$

jolloin $c = 0 \Rightarrow A(\mathrm{int}\,\gamma) = \int_0^L x y'\,dt$

$c = 1 \Rightarrow A(\mathrm{int}(\gamma)) = -\int_0^L y x'\,dt$

jne.

3.2 Lause Ol. γ yksinkertainen suljettu käyrä, $l(\gamma)$ sen pituus ja $A(\mathrm{int}\,\gamma)$ sen rajoittaman alueen pinta-ala. Tällöin pätee isoperimetrinen epäyhtälö":

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) \leq \frac{1}{4\pi} l(\gamma)^2, \quad \text{missä}$$

" = " $\Leftrightarrow$ γ on ympyrä"

Tod: Selvästi, jos γ R-säteinen ympyrä, niin
$l(\gamma) = 2\pi R$ ja $A(\mathrm{int}\,\gamma) = \pi R^2 \Rightarrow$

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \pi R^2 = \frac{1}{4\pi}(2\pi R)^2 = \frac{1}{4\pi} l(\gamma)^2.$$

Vaikea epätriviaali osa saadaan Wirtingerin epäyhtälöstä!

3.3. Lause Ol. $F: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sileä", s.e. $F(0) = F(\pi) = 0$.

Tällöin pätee: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 dt \geq \int_0^\pi F(t)^2 dt$ ja

" = " $\Leftrightarrow$ $F(t) = A\sin t \quad \forall\, t \in [0,\pi]$, A vakio

Tod: Ol. $G(t) = \dfrac{F(t)}{\sin t}$ $\qquad F'(t) = G'(t)\sin t + G(t)\cos t$

$$\Rightarrow \int_0^\pi (F'(t))^2 dt = \int_0^\pi (G'(t)\sin t + G(t)\cos t)^2 dt$$

$$= \int_0^\pi (G'(t))^2 \sin^2 t\, dt + 2\int_0^\pi G'(t)G(t)\sin t\cos t\, dt + \underbrace{\int_0^\pi (G(t))^2\cos^2 t\, dt}_{\times}.$$

$$2\int_0^\pi G'G\sin t\cos t\, dt = \Big/_0^\pi G^2\sin t\cos t - \int_0^\pi G^2(\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt$$

$$= \underbrace{\int_0^\pi G^2(\sin^2 t - \cos^2 t)\, dt}_{\times}$$

Saadaan:

$$\int_0^\pi (F'(t))^2 dt = \int_0^\pi (G'^2 + G^2)\sin^2 t\, dt = \int_0^\pi F^2(t)\, dt + \underbrace{\int_0^\pi (G'(t))^2 \sin^2 t\, dt}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi (F'(t))^2 dt \geq \int_0^\pi F(t)^2 dt$$

" = " $\Leftrightarrow$ $G'(t) \equiv 0 \Leftrightarrow G \equiv$ vakio $\Leftrightarrow F =$ vakio $\sin t$ $\square$

Tod (3.2): OL. γ parametrisoitu parametrilla $t = \frac{\pi s}{\ell(\gamma)} = \varphi(s)$ (3.4.)

missä s parametri kaarenpituuden suhteen l. $t \in [0, \pi]$

ja $\gamma(0) = 0$ (translaatiolla $x \mapsto x - \gamma(0)$)

Esitetään $\ell(\gamma)$, $A(\mathrm{int}\,\gamma)$ napakoordinaateissa: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = r'\cos\theta - r(\sin\theta)\theta' \\ y' = r'\sin\theta + r(\cos\theta)\theta' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = (r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta)^2 = (r')^2\cos^2\theta + r^2\theta'^2\sin^2\theta$$

$$- 2rr'\theta'\cos\theta\sin\theta + (r')^2\sin^2\theta + r^2\theta'^2\cos^2\theta + 2r'r\theta'\sin\theta\cos\theta = r'^2 + r^2\theta'^2.$$

Toisaalta: $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{x'(s)^2 + y'(s)^2}{(\varphi')^2} = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2}$, sillä

$t = \varphi(s)$; $\begin{cases} x(s) = x(\varphi(s)) \\ y(s) = y(\varphi(s)) \end{cases}$ $\begin{cases} x'(s) = x'(t)\varphi'(s) \\ y'(s) = y'(t)\varphi'(s) \end{cases}$, $\varphi'(s) = \frac{\pi}{\ell(\gamma)}$

ja $x'(s)^2 + y'(s)^2 = \|\gamma'(s)\|^2 = 1$

Saatiin: $r'^2 + r^2\theta'^2 = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2} \Rightarrow \int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2)\,dt = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2}\int_0^\pi dt = \frac{\ell(\gamma)}{\pi}$

Toisaalta: $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = r\cos\theta(r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta) -$
$r\sin\theta(r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta) = r^2\theta'\cos^2\theta + r^2\theta'\sin^2\theta = r^2\theta'.$

$$\overset{(3.1.)}{\Rightarrow} A(\mathrm{int}\,\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (xy' - yx')\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\theta'\,dt. \qquad (**)$$

Pitää os: $0 \le \frac{\ell(\gamma)^2}{4\pi} - A(\mathrm{int}\,\gamma) \underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{4}\int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\theta'\,dt$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2 - 2r^2\theta')\,dt$$

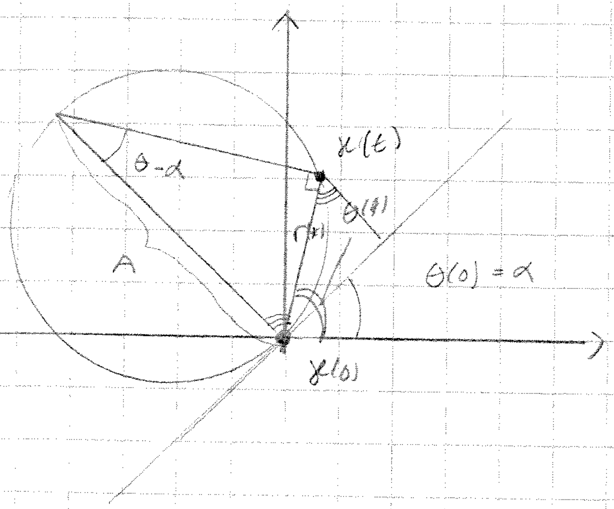
$$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\int_0^\pi r^2(\theta' - 1)^2\,dt}_{\ge 0} + \underbrace{\int_0^\pi (r'^2 - r^2)\,dt}_{\ge 0 \text{ (L. 3.2., } F = r}\Big)$$

$0 = \gamma(0) = \gamma(\pi) \Rightarrow r(0) = r(\pi) = 0$)

$\Rightarrow$ "$\le$"

Toisaalta "$=$" $\Leftrightarrow$ $\theta' \equiv 1$ ja $r(t) = A\sin t$ (3.2)

$\Rightarrow \theta(t) = t + \alpha$, $r(\theta) = A\sin(\theta - \alpha)$

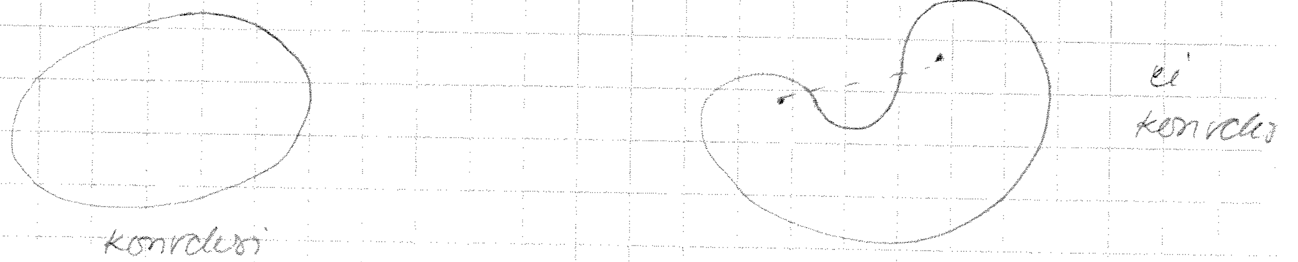


Saadaan "=" $\Rightarrow$

γ on $\frac{A}{2}$-säteinen ympyrä.

□.

<u>Määritelmä</u> yksinkertainen suljettu käyrä on <u>konveksi</u> jos int γ on konveksi l. $\forall\, x, y \in \operatorname{int}(\gamma)$ yhdistettävissä janapolulla int γ:issa

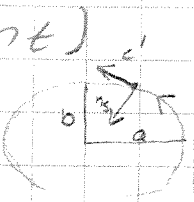


<u>Määritelmä</u> polun c <u>kärkipiste</u> on piste $c(t)$, joka on suunnistetun kaarevuuden kriittinen piste l. $\kappa_s'(t) = 0$

Voidaan os. määritelmä riippumaton parametrisoinnista. (HT)

<u>Esim</u> Ellipsi $c : c(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$$c'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad c''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$$



$$c' \times c'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & b\cos t & 0 \\ -a\cos t & -b\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ab)$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{ab}{(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{3/2}} = \kappa_s$$ (param. posit. kiertosuuntaan)

$$\kappa_s'(t) = -\frac{3}{2}ab\,(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{-5/2}\,(-2a^2\cos t\sin t + 2b^2\sin t\cos t)$$

$$= \frac{3ab\,(b^2 - a^2)\sin t\cos t}{(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{5/2}}$$

Saatiin: Jos c (aito) ellipsi $(a \neq b)$, niin sillä on neljä kärkipistettä $c(0) = (a,0)$, $c(\frac{\pi}{2}) = (0,b)$, $c(\pi) = (-a,0)$, $c(\frac{3\pi}{2}) = (0,-b)$.

Jos c on ympyrä $(a=b)$, niin jokainen piste on kärkipiste.

3.5. Neljän kärkipisteen lause

Jokaisella konveksilla yksinkertaisella tasokäyrällä on vähintään neljä kärkipistettä.

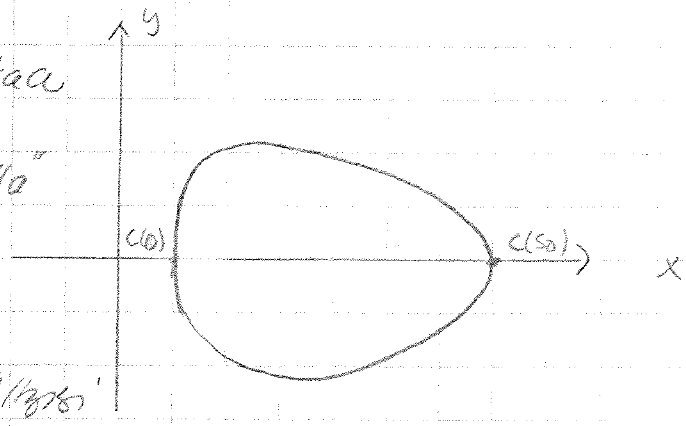
Tod: Jos $\kappa_s \equiv$ rakio niin $\kappa_s' \equiv 0$ ja jokainen piste on kärkipiste. Ol. κ_s ei-rakio. Stationaarisessa pisteessä $\kappa_s' = 0$ ja κ_s' vaihtaa merkkiä (konveksius). Voi olla $\kappa_s'|_{[t,t+\varepsilon]} \equiv 0$

Jatkuvana funktiona $t \mapsto \kappa_s(t)$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä $[a,b]$. Tällöin myös $\kappa' = 0$. (c suljettu)

Voidaan olettaa $[a,b] = [0,L]$ param. kaarenpituuden suhteen ja $\kappa(0)$ minimi, $\kappa(s_0)$ maksimi. $(c(0) = c(L))$

Val (x,y)-koordinaatit s.e. x-akseli sisältää pisteet $c(0)$ ja $c(s_0)$. Tällöin $c(s) = (x(s), y(s))$ ja

$y(0) = y(s_0) = 0$. Käyrä ei leikkaa x-akselia muussa pisteissä välillä $[0, s_0]$, sillä konveksius $\Rightarrow$



Jana $[c(0), c(s_0)] \subset |c|$ sisältäisi x-akselille ja $\kappa_s|_{[0,s_0]} \equiv 0 \Rightarrow \kappa_s \equiv 0$ koska $\kappa(0)$

oli pienin ja $\kappa_s(s_0)$ suurin arvo. $\Rightarrow$ y vaihtaa

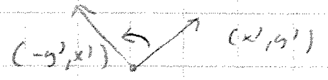
merkkiä täsmälleen pisteissä 0 ja s_0.

VO: pisteet $c(0)$ ja $c(s_0)$ ovat ainoat kärkipisteet.

Tällöin κ_s' vaihtaa merkkiä vain pisteissä $s=0$ ja $s=s_0$.

$\Rightarrow$ funktio $s \mapsto \kappa_s'(s)y(s)$ ei vaihda lainkaan

merkkiä. Ol. param. posit. kiertosuuntaan,



jolloin $\kappa = \kappa_s$ (konveksius)

Frenét $\Rightarrow$ $e_1 = (x', y')$, $e_2 = n_s = (-y', x')$

$$(x'', y'') = e_1' = \kappa_s e_2 = \kappa_s(-y', x')$$

$$\Rightarrow x'' = -\kappa_s y'$$

$$\Rightarrow \int_0^L \kappa_s'(s)y(s)\,ds = \Big/_0^L \kappa_s(s)y(s) - \int_0^L \kappa_s(s)y'(s)\,ds$$

$$\overset{y(L)=y(0)=0}{=} \int_0^L x''(s)\,ds = x'(L) - x'(0) = 0,$$ sillä

polku oli suljettu. ↯ sillä integroitava $s \mapsto \kappa'(s)y(s)$

ei vaihda merkkiä, joten $\kappa_s' y \equiv 0 \Rightarrow \kappa_s \equiv$ vakio ↯.

Siis löytyy kolmas piste, missä κ_s' vaihtaa merkkiä.

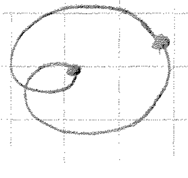
$t \mapsto \kappa_s'(t)$ jaksollinen, joten pisteitä oltava

parillinen määrä $\Rightarrow$ vähintään 4 pistettä. $\square$

Huom. 1) Lauseen väite pätee myös ilman oletusta 'konveksi'

2) Lause ei päde ilman oletusta 'yksinkertainen'

2 kp →



II Pinnat

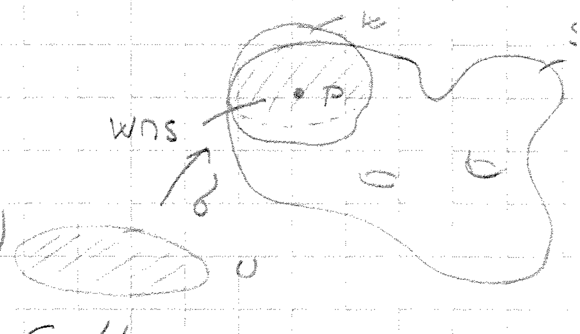
1. $\mathbb{R}^3$:n pinnat

Määritelmä $S \subset \mathbb{R}^3$ on (topologinen) pinta, jos

$\forall\, p \in S\ \exists$ avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ ja avoin joukko

$W \subset \mathbb{R}^3$, $p \in W$ s.e. $\exists$ homeomorfismi $\sigma : U \to W \cap S$.

idea: σ parametrisoi pinnan pisteen
p ympäristön



Muistutus: $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin (merk. $U \subset_o \mathbb{R}^n$)
$\Leftrightarrow\ \forall\, u \in U\ \exists\, r > 0$ s.e.
$$B(u,r) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|u - v\| < r \} \subset U$$

Jos $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, niin kuvaus $f : X \to Y$ on
homeomorfismi jos f on bijektio ja f, f^{-1} jatkuvia

Sanotaan: kokoelma $\mathcal{A} = \{(\sigma, U)\}$ s.e. $S \subset \bigcup_{(\sigma,U)\in\mathcal{A}} \sigma(U)$

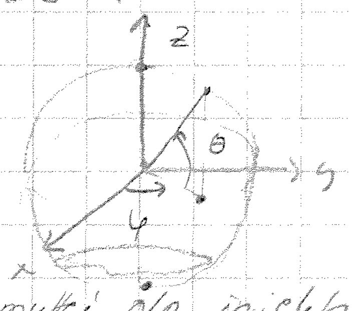
on pinnan S kartasto.

Huom. usein sanotaan σ on parametrisointi ja
σ^{-1} on karttakuvaus

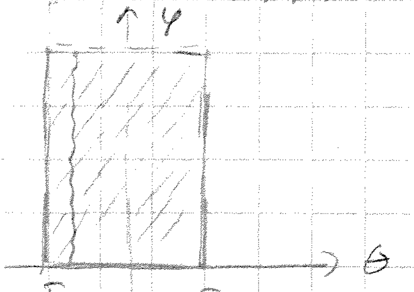
Esim $1°$ $S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ yksikköpallo

luonnollinen parametrisointi pallokoordinaateissa:

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi,\ \cos\theta \sin\varphi,\ \sin\theta)$$



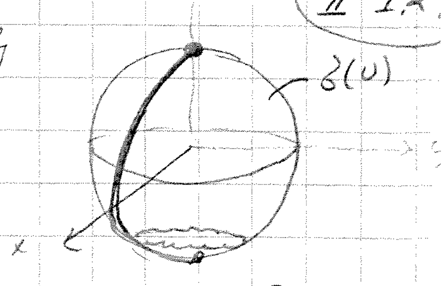
Tarvitaan $(\theta, \varphi) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi) =: U$



$\sigma(U)$ peittää S^2:n, mutta ei ole injektio
eikä U ole avoin.

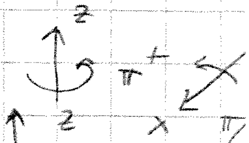
Valinta $U := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$
suurin mahdollinen, mutta $\sigma(U)$
ei peitä S^2:ta.

Tällöin $\sigma : U \to W \cap S^2$, missä
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0$ tai $x < 0\}$
on $\mathbb{R}^3$:n avoin joukko



$\sigma : U \to W \cap S^2$ homeomorfismi ?

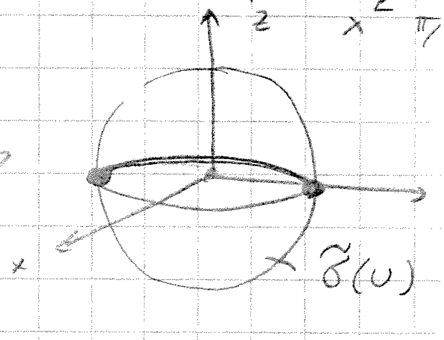
Olk. $\tilde{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ toinen parametrisointi, joka



saadaan kiertämällä joukkoa $\sigma(U)$

kulman π (posit) z-akselin suhteen

ja " $\pi/2$ (posit) x- " "



eli
$x \mapsto -x \mapsto -x$
$y \mapsto -y \mapsto -z$
$z \mapsto z \mapsto -y$

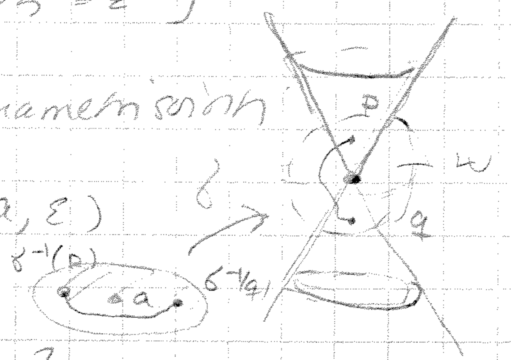
$\Rightarrow \tilde{\sigma}(\theta,\varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin\varphi)$

Päts $S^2 = \sigma(U) \cup \tilde{\sigma}(U)$.

Esim 2° kartio $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$

ei ole pinta! Ol. $\sigma : U \to K \cap W$ parametrisointi

s.e. $\sigma(a) = 0$. Voi ol. $U = B^2(a, \varepsilon)$



Merk. $K = K_+ \cup K_-$ $K_+ = \{(x,y,z) \in K \mid z > 0\}$
$K_- = \{(x,y,z) \in K \mid z < 0\}$

$W \subset_o \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists\ p \in K_+ \cap W$ ja $q \in K_- \cap W$

$\exists$ Pisteet
$\sigma^{-1}(p), \sigma^{-1}(q)$ yhdistävä polku c U:ssa s.e.
$c(t) \neq a \quad \forall t$.

$\Rightarrow \sigma(c) \cap \{0\} = \emptyset$ ↯.

Kuitenkin: $K_+ \cup \{0\}$, $K_- \cup \{0\}$, $K_+ \cup K_-$ (topologisia)
pintoja $\sigma_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $(u,v) \mapsto (u, v, \pm\sqrt{u^2+v^2})$
$\tilde{\sigma}_\pm = \sigma_\pm |_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$.