

Figure 2.4: Cornu spiral with constant κ/s

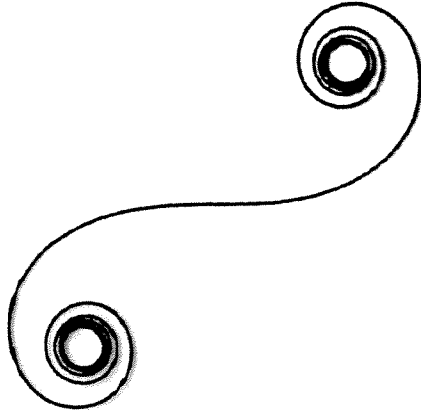


Fig. 1. $\kappa = s$



Fig. 2. $\kappa = s^2$

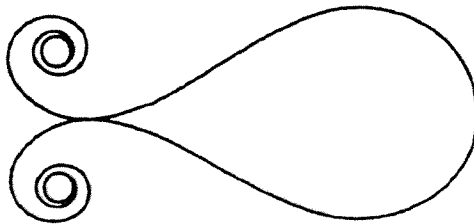


Fig. 3. $\kappa = s^2 - 2.19$

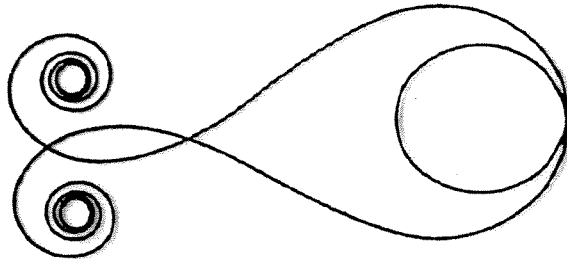


Fig. 4. $\kappa = s^2 - 4$

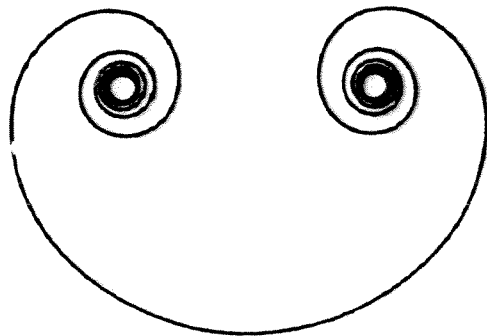


Fig. 5. $\kappa = s^2 + 1$

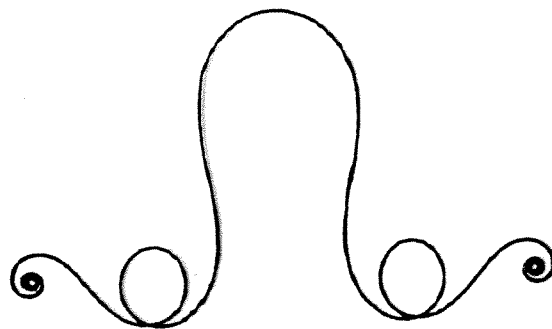


Fig. 6. $\kappa = 5s^4 - 18s^2 + 5$

$$\tilde{c}'(t) = \left(-\sin \frac{t}{R}, -\cos \frac{t}{R} \right)$$

$$\|\tilde{c}'(t)\| = 1$$

(2.7)

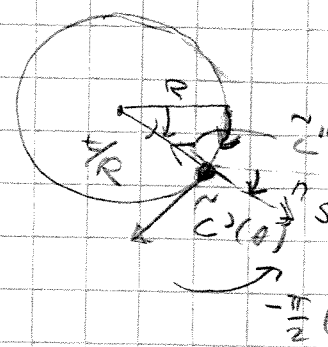
$$\tilde{c}''(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, +\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R} \right)$$

$$\|\tilde{c}''(t)\| = \frac{1}{R}$$

$$\begin{aligned} n_s &= \left(-\sin \left(\frac{t}{R} - \frac{\pi}{2} \right), -\cos \left(\frac{t}{R} - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \left(+\cos \frac{t}{R}, -\sin \frac{t}{R} \right) \updownarrow \tilde{c}''(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \kappa_s = -\frac{1}{R}$$

1.2.3 \Rightarrow myös muiden polkujen, joilla $\kappa_s = -\frac{1}{R}$ jolle on ympyrä. \square .



Huom

Avaruudessa kaarevuus κ ei enää "näytä" eroilemaan käyrästä.

Esim. Ympyräspiraalille (esim 1(3)) $c: c(t) = \left(\frac{R}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{R}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$
 $(a = \frac{R}{2} = b, \alpha = 1 \Rightarrow \beta = \frac{R}{\sqrt{2}})$

$$c'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \|c'(t)\| = 1$$

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{\sqrt{2}}{R} t, -\frac{1}{R} \sin \frac{\sqrt{2}}{R} t, 0 \right) \Rightarrow \kappa = \|c''(t)\| = \frac{1}{R}$$

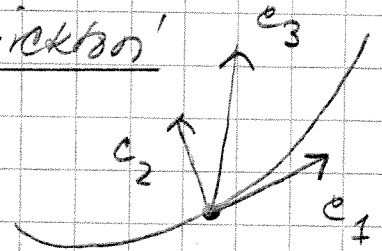
kuten tason R -säteiselle ympyrälle!

Tämä taran lisäinformaation antaa taso, joka mittaa käyrän poikkeamaa tasokäyrästä.

Määntelmä Ol $c \in \mathbb{R}^3$:n säänn. polku, joka parametrisoitu kaarenpituuden suhteen. Jos lisäksi pätee $c''(t) \neq 0 \forall t$, niin c on Frenet-käyrä.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ muodostuu vektoreista

$$(2.5) \begin{cases} e_1 = c' & \text{tangenttiketoni} \\ e_2 = \frac{c''}{\|c''\|} = \frac{c''}{\kappa} & \text{päänormaali-vektori} \\ e_3 = e_1 \times e_2 & \text{ sivunormaali-vektori} \end{cases}$$



Huom järjestetty joukko $\{e_1, e_2, e_3\}$

on \mathbb{R}^3 :n oikeakätisen etänormaan kanta $\forall t$:

$$e_3 = e_1 \times e_2, \quad e_1 = e_2 \times e_3, \quad e_2 = e_3 \times e_1$$

(positiivinen kiertoahtelu).

Johdetaan Frenét yhtälöt: (2.5) $\Rightarrow e_1' = c'' = \kappa e_2$ (*)

$$e_2' = \underbrace{(e_2' \cdot e_1)}_{= -e_1' \cdot e_2} e_1 + \underbrace{(e_2' \cdot e_2)}_{= 0} e_2 + (e_2' \cdot e_3) e_3$$

Sillä $e_1 \cdot e_2 = 0$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = 0$$

$$= \underbrace{-(e_1' \cdot e_2)}_{= \kappa} e_1 + \underbrace{(e_2' \cdot e_3)}_{=: \tau \text{ (merki.)}} e_3 = -\kappa e_1 + \tau e_3$$

$$e_3' = \underbrace{(e_3' \cdot e_1)}_{= -(e_1' \cdot e_3)} e_1 + \underbrace{(e_3' \cdot e_2)}_{= -(e_2' \cdot e_3) = -\tau} e_2 + \underbrace{(e_3' \cdot e_3)}_{= 0} e_3 = -\tau e_2$$

$\underbrace{-(e_1' \cdot e_3)}_{(*)} = -\kappa(e_2 \cdot e_3) = 0$

sillä $e_2 \cdot e_3 = 0$

Saabin \mathbb{R}^3 :n Frenet-yhtälöt:

(F3)
$$\begin{cases} e_1' = \alpha e_2 \\ e_2' = -\alpha e_1 + \tau e_3 \\ e_3' = -\tau e_2 \end{cases}$$

Matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Määritelmä Funktio $\tau := e_2' \cdot e_3$ on Frenet-käyrän torsio.

Huom Torsio on (e_1, e_2) -tason muutos, kun

$\tau \equiv 0$ saadaan
$$\begin{cases} e_1' = \alpha e_2 \\ e_2' = -\alpha e_1 \\ e_3' = 0 \end{cases}$$
 eli $e_3 \equiv$ vakio

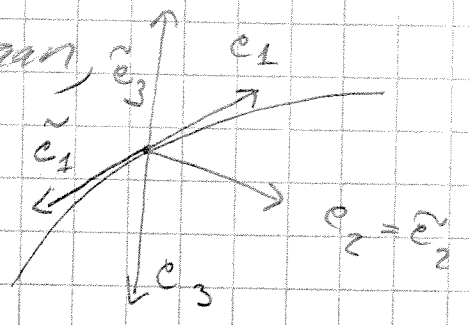
ja saadaan tason \mathbb{R}^2 Frenet-yhtälöt

(F2)
$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Huom käyrän suunnistuksen muuttaminen ei vaikuta torsioon! Jos \tilde{c} on polku c

suunnistettuna vastakkaiseen suuntaan,

niin
$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \tilde{c}' = -c' = -e_1 \\ \tilde{e}_2 &= \frac{\tilde{c}''}{\|\tilde{c}''\|} = \frac{c''}{\|c''\|} = e_2 \end{aligned}$$



$$\tilde{e}_3 = \tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2 = -e_1 \times e_2 = -e_3$$

$$\tilde{e}_2' = -e_2' \Rightarrow \tilde{\tau} = \tilde{e}_2' \times \tilde{e}_3 = e_2' \times e_3 = \tau$$

2.6. Lause Olkoon c \mathbb{R}^3 :n säännöllinen polku, jolle jokaisella $c''(t) \neq 0 \quad \forall t$. Sen torsio saadaan lausekkeesta

$$\tau = \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2}$$

Tod: a) ol. ensin $\|c'\| = 1$. Tällöin

$$c'' = \alpha c_2 \Rightarrow c''' = \alpha' c_2 + \alpha c_2'$$

$$c' = c_1 \Rightarrow c' \times c'' = \alpha c_1 \times c_2 = \alpha c_3$$

$$\Rightarrow \|c' \times c''\| = \alpha \quad e_3 \cdot e_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2} = \frac{\alpha c_3 \cdot (\alpha' c_2 + \alpha c_2')}{\alpha^2} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{e_3 \cdot c_2'}{\alpha} = \alpha'$$

b) Ol. nyt yle. c ja $\tilde{c}(y(t)) = c(t)$, missä \tilde{c} on polku c parametrisoituna kaarenpituuden suhteen $s = y(t)$.

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow c'(t) = \tilde{c}'(y(t)) y'(t) \Rightarrow \tilde{c}' = \frac{c'}{y'}$$

$$c''(t) = \tilde{c}''(y(t)) y'(t)^2 + \tilde{c}'(y(t)) y''(t) = \tilde{c}''(y')^2 + c' \frac{y''}{y'^3}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}'' = (c'' - c' \frac{y''}{y'^3}) / (y')^2$$

$$\Rightarrow \tilde{c}' \times \tilde{c}'' = \frac{1}{(y')^3} c' \times c'' \Rightarrow \|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\| = \frac{1}{(y')^3} \|c' \times c''\|$$

$$c'''(t) = \tilde{c}'''(y(t)) (y'(t))^3 + 3\tilde{c}''(y(t)) y'(t) y''(t) +$$

$$\tilde{c}'(y(t)) y'(t) y''(t) + \tilde{c}''(y(t)) y''(t) = \tilde{c}'''(y')^3 + 3\tilde{c}'' y' y'' + \tilde{c}' y''^2$$

$$= \tilde{c}'''(y')^3 + 3 \left(\frac{c''}{y'} - \frac{c' y''}{(y')^2} \right) y'' + \frac{c' y''^2}{y'}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}''' = \frac{c'''}{(y')^3} - 3 \left(\frac{c''}{(y')^2} - \frac{c' y''}{(y')^3} \right) y'' - \frac{c' y''^2}{(y')^4}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}''' \cdot (\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{(y')^6} c''' \cdot (c' \times c'') \quad (**)$$

$$\tilde{c}'' = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\|^2} \stackrel{(**)}{=} \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2} \quad \square$$

Esim "ympyräspiraali" (2.3): $c: t \mapsto (a \cos \frac{a}{\beta} t, a \sin \frac{a}{\beta} t, \frac{b}{\beta} t)$
 $\beta = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$c_1 = c'(t) = \left(-\frac{a\alpha}{\beta} \sin \frac{a}{\beta} t, \frac{a\alpha}{\beta} \cos \frac{a}{\beta} t, \frac{b}{\beta} \right)$$

$$c''(t) = \left(-a \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cos \frac{a}{\beta} t, -a \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \sin \frac{a}{\beta} t, 0 \right)$$

$$\alpha = \|c''(t)\| = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 a \quad (\text{koska } a > 0)$$

$$e_2 = \frac{c''}{\alpha} = \left(-\cos \alpha \frac{t}{\beta}, -\sin \alpha \frac{t}{\beta}, 0 \right)$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\alpha x \sin \alpha \frac{t}{\beta}}{\beta} & \frac{\alpha x \cos \alpha \frac{t}{\beta}}{\beta} & \frac{b}{\beta} \\ -\cos \alpha \frac{t}{\beta} & -\sin \alpha \frac{t}{\beta} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{b}{\beta} \sin \alpha \frac{t}{\beta}, -\frac{b}{\beta} \cos \alpha \frac{t}{\beta}, \frac{\alpha x}{\beta} \right)$$

$$e_2' = \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha \frac{t}{\beta}, -\frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha \frac{t}{\beta}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow \tilde{c} = e_2' \cdot e_3 = \frac{\alpha b}{\beta}$$

\therefore ympyräspiraalille kaareuvuus $\kappa = \frac{\alpha^2 a}{\beta^2} = \text{vakio}$

toroidi $\tilde{c} = \frac{\alpha b}{\beta} = \text{vakio}$

Voidaan ol. $\beta^2 = \alpha^2 a^2 + b^2 = 1$ jolloin

$$\kappa = \alpha^2 a, \quad \tilde{c} = \alpha b \quad \Rightarrow \quad 1 = \alpha^2 \left(\frac{\kappa}{\alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{c}}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} (\kappa^2 + \tilde{c}^2).$$

Olk. kääntäen annettu vakiot κ, \tilde{c} . Tällöin yhtälöillä

$$(2.7.) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \kappa^2 + \tilde{c}^2 \\ a = \frac{\kappa}{\alpha^2 + \tilde{c}^2} \\ b^2 = \frac{\tilde{c}^2}{\alpha^2 + \tilde{c}^2} \end{cases} \quad \text{on 1-käs ratkaisu}$$

Saatiin: \mathbb{R}^3 :n Frenét käyrä, jolla vakukaareuvuus ja vakutoroidi on ympyräspiraalin kaari. Tapauksessa $\tilde{c} = 0$ ympyrän kaari.

Akkuarrot:

$$\begin{aligned} c(0) &= (a, 0, 0) \\ c'(0) &= (0, \alpha a, b) \\ c''(0) &= (-\alpha a^2, 0, 0) \end{aligned}$$

Vastakaava tulos pätee yleisessä:

2.7. lause Ol. c ja \tilde{c} \mathbb{R}^3 :n Franét-käyrä, (2.1)

jolla sama kaarenuus funktio $t \mapsto \kappa(t)$ ja torsio $t \mapsto \tau(t)$. Tällöin c ja \tilde{c} ovat \mathbb{R}^3 :n jykkaa liikettä (= pyörimys ja siirto) M vaille samat eli pätee $\tilde{c}(t) = M(c(t)) \forall t$.

Jos \tilde{c}, κ ovat mu. sikeitä funktioita $\kappa > 0$, niin löytyy Franét-käyrä, jonka kaarenuus on κ ja torsio on τ .

Tod: Ol $\{e_1, e_2, e_3\}$ c :n ja $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ \tilde{c} :n Franét-kehysen OK. t_0 jokin parametriarvo. Soveltamalla jykkaa liikettä si- teakärsiin onn. koordinaatistihin $\{e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0)\}$ ja $\{\tilde{e}_1(t_0), \tilde{e}_2(t_0), \tilde{e}_3(t_0)\}$ voidaan olettaa:

$$(2.8) \quad c(t_0) = \tilde{c}(t_0), \quad e_i(t_0) = \tilde{e}_i(t_0) \quad i=1, 2, 3.$$

Tarkastellaan lauseketta:

$$A(t) = (\tilde{e}_1 \cdot e_1 + \tilde{e}_2 \cdot e_2 + \tilde{e}_3 \cdot e_3)(t)$$

$$(2.8.) \Rightarrow A(t_0) = 3. \quad \text{Nisäki pätee} \quad \tilde{e}_i \cdot e_i \leq 1$$

$$\text{ja} \quad (\tilde{e}_i \cdot e_i = 1 \Leftrightarrow \tilde{e}_i = e_i) \quad \forall i=1, 2, 3.$$

$$\Rightarrow A(t) \leq 3 \quad \text{ja} \quad (A(t) = 3 \Leftrightarrow \tilde{e}_i = e_i \quad \forall i=1, 2, 3).$$

Jos voidaan os. $A(t) \equiv 3$, niin erityisesti

$$\tilde{c}'(t) = \tilde{e}_1'(t) = e_1'(t) = c'(t) \quad \forall t \quad \text{eli} \quad \tilde{c}' - c' \equiv 0$$

ja $\tilde{c} - c \equiv \text{vakio} = 0$.
(2.8)

Ensimmäinen väite: \dot{c}_i 's saadaan jos $A \equiv 3$:

$$A^j = \tilde{e}_1^j \cdot c_1 + \tilde{e}_1^j \cdot \dot{c}_1 + \tilde{e}_2^j \cdot c_2 + \tilde{e}_2^j \cdot \dot{c}_2 + \tilde{e}_3^j \cdot c_3 + \tilde{e}_3^j \cdot \dot{c}_3$$

$$F3: \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{e}_1^j \\ \tilde{e}_2^j \\ \tilde{e}_3^j \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1^j \\ \tilde{e}_2^j \\ \tilde{e}_3^j \end{pmatrix}$$

$$A^j = \alpha \tilde{e}_2^j \cdot c_1 + \tilde{e}_1^j \cdot \alpha c_2 + (-\alpha \tilde{e}_1^j + \beta \tilde{e}_3^j) \cdot c_2 + \tilde{e}_2^j \cdot (-\alpha c_1 + \beta c_3) - \beta \tilde{e}_2^j \cdot c_3 - \tilde{e}_3^j \cdot \beta c_2 = 0$$

$$\Rightarrow A \equiv \text{vakio} = A(t_0) = 3.$$

Toinen väite: Jos α, β annettu \Rightarrow yhtälöllä

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (F3)$$

1-käs olemä ratkaisu alkuehdolla $e_1(t_0) = (1, 0, 0)$,

$e_2(t_0) = (0, 1, 0)$, $e_3(t_0) = (0, 0, 1)$. Matriisi

$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$ riisymmetrisen $\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ \mathbb{R}^3 'n

ortonomaalit \Rightarrow koordinaatit $\forall t$.

Näöntellään $c(t) = \int_{t_0}^t c_1(s) ds$. Tällöin $c'(t) = e_1(t)$

joten $\|c'(t)\| = 1$. Lisäksi järke $c''(t) = e_1'(t) = \alpha e_2$ (F3)

joten $\alpha = \|c''(t)\|$ on c 'n kääntämys.

$e_3 \perp \text{sp}\{e_1, e_2\}$, $\|e_3\| = 1 \Rightarrow e_3 = \lambda e_1 \times e_2$, $\lambda = \pm 1$

λ sileä, $e_3(t_0) = e_1(t_0) \times e_2(t_0) \Rightarrow \lambda(t) \equiv \text{vakio} = \lambda(t_0) = 1$. (F3)

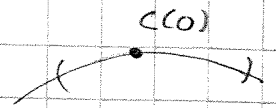
$e_2^j \cdot e_3 = -e_3^j \cdot e_2 = +\beta e_2^j \cdot e_2 = +\beta$ on c 'n kääntämys.

Tutkitaan \mathbb{R}^3 'in Frenet-käyrää approksimoivan Taylor-

(2.11)

kehityksen esitystä Frenet kehysessä:

in Taylor pisteen $C(0)$ ympäristössä:



$$C(t) = C(0) + C'(0)t + \frac{C''(0)t^2}{2} + \frac{C'''(0)t^3}{3!} + O(t^4).$$

Esitään kerroinfunctiot $t \mapsto \alpha(t)$, $t \mapsto \beta(t)$, $t \mapsto \gamma(t)$ s.c.

$$C(t) = C(0) + \alpha(t)e_1(0) + \beta(t)e_2(0) + \gamma(t)e_3(0) + O(t^4)$$

$$(F3) \Rightarrow \begin{cases} C' = e_1 \\ C'' = e_1' = \alpha e_2 \\ C''' = \alpha' e_2 + \alpha e_2' = \alpha' e_2 + \alpha(-\alpha e_1 + \gamma e_3) \\ = -\alpha^2 e_1 + \alpha' e_2 + \alpha \gamma e_3 \end{cases}$$

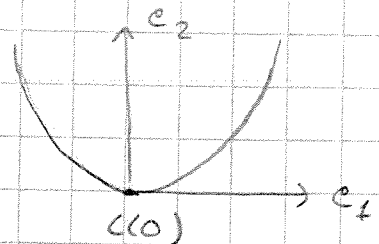
$$\Rightarrow C(t) = C(0) + e_1 t + \frac{\alpha e_2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} (-\alpha^2 e_1 + \alpha' e_2 + \alpha \gamma e_3) + O(t^4)$$

$$(*) = C(0) + \underbrace{\left(t - \frac{\alpha^2 t^3}{6}\right)}_{=: \alpha(t)} e_1 + \underbrace{\left(\frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\alpha' t^3}{6}\right)}_{=: \beta(t)} e_2 + \underbrace{\frac{\alpha \gamma t^3}{6}}_{=: \gamma(t)} e_3 + O(t^4)$$

Tämän avulla projektiokäyrät (e_i, e_j) -tasoin

(e_1, e_2) -tasossa (kastetaso):

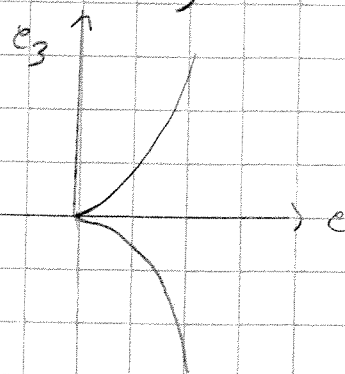
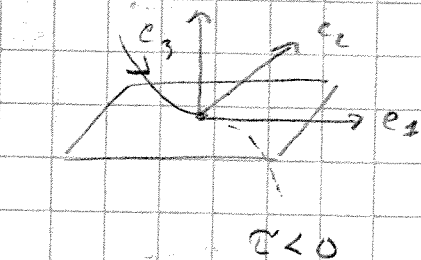
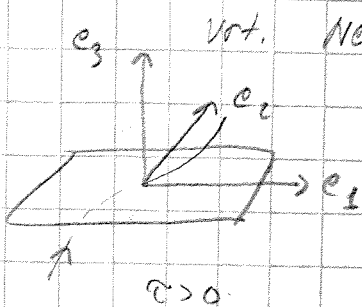
$$C(t) = C(0) + t e_1 + \frac{\alpha t^2}{2} e_2 + O(t^3)$$



1. toisen kertaluvun approksimaatio on paraabeli

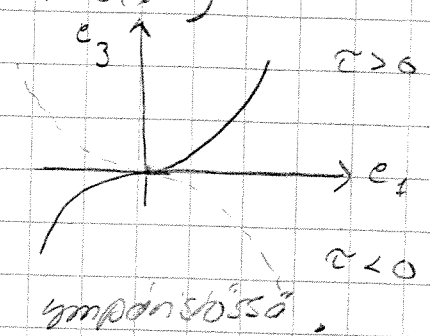
(e_2, e_3) -taso (normaali taso)

$$C(t) = C(0) + \left(\frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\alpha' t^3}{6}\right) e_2 + \frac{\alpha \gamma t^3}{6} e_3 + O(t^4)$$



(e_1, e_3) -taso (suoristara) taso

$$c(t) = c(0) + \left(t - \frac{\alpha^2 t^3}{6}\right)e_1 + \frac{\alpha^2}{6} t^3 e_3 + o(t^4)$$



Esitys (*) on frenet köyön

lokaali kanoninen muoto pisteeseen $c(0)$ ympäristössä.

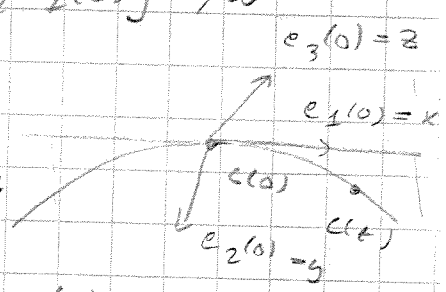
Ensimmäisen seurauksen: \exists parametrisi $t=0$ ympäristö

$I = (-\epsilon, \epsilon)$ s.e. $C(I) \subset$ suoristavan tason rajaaman positiivisella e_2 -akselilla suuntainen puolivaruus: $x > 0 \Rightarrow$

nitäkin pienillä t $\beta(t) = \alpha \frac{t^2}{2} + \alpha' \frac{t^3}{6} \geq 0$ ja $(=0 \Leftrightarrow) t=0$

Toinen seurauksen: kosketustaso saadaan rajana

tasosta, jotka sisältävät suoran $sp\{e_1(0)\}$ ja pisteeseen $c(t)$ kun $t \rightarrow 0$:



Tasot, jotka sisältävät suoran $sp\{e_1(0)\}$ ovat muotoa $z(t) = k y(t)$ tai $y(t) = 0$.

$y(t) = 0$ on suoristava taso $(e_1(0), e_3(0))$ joka ei sisällä $|C|$ n pisteitä pienillä $t \neq 0$. Taso kulkee

pisteeseen $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ kautta $((e_1(0), e_2(0), e_3(0))$ -koordinaatissa.

$$k = \frac{z(t)}{y(t)} = \frac{y(t) + o_2(t^4)}{\beta(t) + o_2(t^4)} = \frac{\frac{\alpha^2 t^3}{6} + o_1(t^4)}{\frac{\alpha t^2}{2} + \alpha' \frac{t^3}{6} + o_2(t^4)} \rightarrow 0 \text{ kun } t \rightarrow 0$$

$t \rightarrow 0$ eli rajalla saadaan kosketustaso (e_1, e_2) .

1.2.7 yleisyy korkeampiin dimensioihin:

(2.1)

Määritelmä Säännöllinen polku $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on

Frenét käyrä jos $\|c'(t)\| = 1$ ja $\forall t \in [a, b]$

vektorit $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ ovat lineaarisesti

riippumattomat. Pisteseen $c(t)$ liittyvä Frenét

n-kehys $\{e_1, \dots, e_n\}$ määräytyy 1-käsitteisesti

ehdoista (i) $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormaali ja positiivisesti suunnistettu

(ii) $\forall k=1, \dots, n-1$ $sp\{e_1, \dots, e_k\} = sp\{c'(t), \dots, c^{(k)}(t)\}$

(iii) $c^{(k)}(t) \cdot e_k(t) > 0 \quad \forall k=1, \dots, n-1$

Huom 1° Vektorit e_1, \dots, e_{n-1} määräytyvät derivaatoista

$c'(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ Gram-Schmidt ortonomisointimen avulla:

$$e_1 := c'(t)$$

$$e_2 := c''(t) / \|c''(t)\|$$

$$e_3 := (c'''(t) - (c'''(t) \cdot e_1)e_1 - (c'''(t) \cdot e_2)e_2) / \|c'''\|$$

...

$$e_j := (c^{(j)}(t) - \sum_{i=1}^{j-1} (c^{(j)}(t) \cdot e_i) e_i) / \|c^{(j)}\|$$

$$j=2, \dots, n-1$$

e_n määräytyy 1-käsitteisesti ehdosta (i)

2° $n=2$: sään., $\|c'\| = 1 \Rightarrow$ Frenét

$n=3$: sään., $\|c'\| = 1, c'' \neq 0 \Rightarrow$ Frenét

3° Frenét kehys $t \mapsto (e_1(t), \dots, e_n(t))_{c(t)}$ on pitkin polkua c liikkuva kehys, joka kussakin polun pisteessä antaa uudet \mathbb{R}^n 'in (käyrän geometriaan heijastavat) koordinaatit.

Voidaan todistaa (kts. k.2005 luennot)

(2.1)

2.8. Lause Oletetaan C \mathbb{R}^n :n frenet-käyrä ja

e_1, \dots, e_n siihen liittyvä frenet-kehys. Tällöin löytyy

sielöt funktiot $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ s.e. $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2} > 0$

funktio $t \mapsto \alpha_i(t)$ $i=1, \dots, n-1$ on käyrän C

frenet-kaarenavuus, Yhtälöryhmä

$$(Fn) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

on käyrään C liittyvät frenet-yhtälöt ja

$$\alpha_i = e_i' \cdot e_{i+1}$$

2.9. Käyrän lokaalisen teorian peruslause

Oletetaan annettu sielöt funktiot $t \mapsto \alpha_i(t)$, $(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, n-1$ s.e. $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2} > 0$.

Oletetaan lisäksi kiinteällä parametrilla $t_0 \in (a,b)$ annettu piste $q_0 \in \mathbb{R}^n$ ja kehys $(e_1(t_0), \dots, e_n(t_0))$.

Tällöin löytyy 1-käsitteinen frenet-käyrä s.e.

- (i) $C(t_0) = q_0$
- (ii) $(e_1(t_0), \dots, e_n(t_0))$ on C :n frenet-kehys pisteessä q_0
- (iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ C :n frenet-kaarenavuudet.