JOHDATUS DIFFERENTIAALIGEOMETRIAAN

Mat-1.3530 Käyrät ja pinnat

Luennot: ti 10-12 U322
K. Peltonen to 12-14

Harjoitukset: pe 12-14 U356
Juha-Matti Perkkiö (alkaen 26.1.)

Suoritus: 2 välikoetta (2x24p)
+ harjoituspisteet (24p)
tai tentti
tai harjoitustyö

1. välikoe la 3.3. 10-13

2. välikoe la 14.4. 10-13

Kursimateriaali:

luentomonisteet

A. Pressley: Elementary differential geometry, Springer

Tavoitteet:

- yleissivistys 'geometrian perusteet'
- konkreettinen kysymyksenasettelu: käyrät ja pinnat $\mathbb{R}^3$:ssa
→ abstraktin monistojen teorian motivointi
yhteydet sovelluksiin ja muuhun matematiikkaan

Sisältö:

I Käyrät (~ 3 vk)

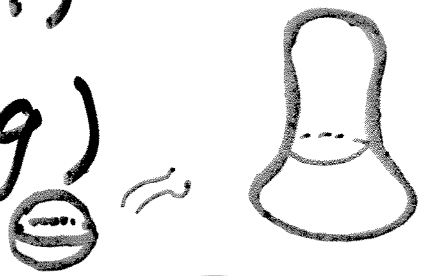
1. Taso- ja avaruuskäyrät
2. Kaarevuus ja torsio
3. Käyrien globaalia teoriaa

II Pinnat (~ 8 vk)

1. $\mathbb{R}^3$:n pinnat
2. Ensimmäinen perusmuoto
3. Pinnan kaarevuus
4. Gaussin kuvaus
5. Gauss-Bonnet pinnoille

Gauss – Bonnet

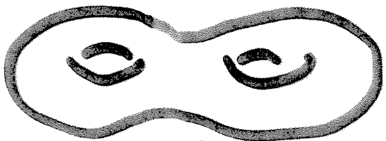
$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(M)$$
$$= 4\pi(1-g)$$



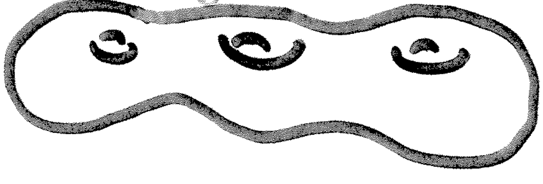
$g=0$ $(\chi=2)$ $\Leftrightarrow$ $M \approx S^2$

$g=1$ $(\chi=0)$ $\Leftrightarrow$ $M \approx T^2$

$g \geq 2$ $(\chi<0)$ $\Leftrightarrow$ M "g-reikäinen pinta"



$g=2$



$g=3$

Mistä nimi?

1812 Poisson $\int_M K\,dA$ = vakio (variaatiossa

1815 Rodrigues erikoistapauksia

1888 Dyck (+ Kronecker 1869) $\mathbb{R}^3$:n upotetuille pinnoille

1903 Boy triangulaatioille

1921 Blaschke "folk theorem"

1938 van Kampen

1944 Chern käsitteellinen todistus

Gauss
- kaarevuus K
- pinnan sisäinen invariantti

Bonnet
- erikoistapauksia
- ei karakteristikan käsitettä

Differentiaaligeometria Mat - 1.3530

Johdatus differentiaaligeometriaan:

Käyrät ja pinnat

Kevät 2007 K. Peltonen / Juha-Matti Perkkiö

Sisältö:

I. Käyrät

1. Taso- ja avaruuskäyrät
2. Kaarevuus ja torsio
3. Tasokäyrien globaalia teoriaa

II Pinnat

1. $\mathbb{R}^3$:n pinnat
2. Ensimmäinen perusmuoto
3. Pinnan kaarevuus
4. Gaussin kuvaus
5. Gauss - Bonnet pinnoille

I Käyrät   1. Taso- ja avaruuskäyrät   1.1

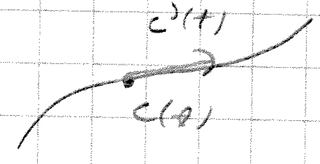
Määritelmä

Polku on jatkuva kuvaus $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $a < b$

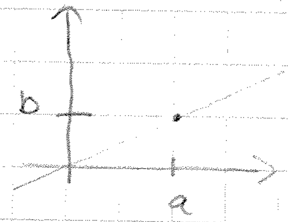
Käyrä on polun c kuvajoukko $c(I) \subset \mathbb{R}^n$; merk. usein myös $|c|$.

Huom Polku $\hat{=}$ Käyrä + jnk parametrisointi

Säännöllinen polku on polku $c : I \to \mathbb{R}^n$ s.e. pätee:
(1) $\exists\ c'(t), c''(t), \ldots, c^{(k)}(t), \ldots$ (päätepisteissä toispuoleiset) $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\forall\ t \in I = [a,b]$.
(2) $c'(t) \neq 0 \quad \forall\ t \ [a,b]$



Esim $t \mapsto c(t) = (at, bt)$
suoran standardi parametrisointi (sään. polku



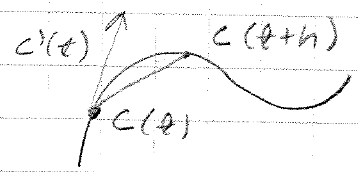
$s \mapsto \tilde{c}(s) = (as^3, bs^3)$ ei sään.

vaikkakin $|c| = |\tilde{c}|$ sama käyrä

Määritelmä Polun c pituus $l(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$,

missä $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$:n tavallinen normi

Tulkinta: $c'(t)$ on polun pisteeseen $c(t)$ liittyvä tangenttivektori



$$c(t+h) - c(t) = c'(t)h + h\underbrace{\varepsilon(t,h)}_{\to 0 \text{ kun } h \to 0}$$

Määritelmä Käyrän parametrisointi kaarenpituuden suhteen on säännöllinen polku $t \mapsto c(t)$ s.e. pätee $\|c'(t)\| = 1 \quad \forall\ t \in [a,b]$.

1.1. Lause Säännöllinen polku voidaan paramet- (1.2.)
risoida kaarenpituuden suhteen.

Tod: Ol. $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sään. polku. Sen

pituus $L = \ell(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$. Aset. parametriväli $[0,L]$

ja kuvaus $\varphi: [a,b] \to [0,L]$ s.e. $s = \varphi(t) = \int_a^t \|c'(\tilde{t})\| d\tilde{t}$

Tälle: $\varphi'(t) = \underset{\neq 0}{\|c'(t)\|}$ ($\tilde{t} \mapsto \|c'(\tilde{t})\|$ jatkuva).

Siis $t \mapsto \varphi(t)$ aidosti kasvava, joten sillä

on käänteisfunktio $\varphi^{-1}: [0,L] \to [a,b]$.

Polku $s \mapsto \tilde{c}(s) := c(\varphi^{-1}(s))$ on sileä parametrisointi

kaarenpituuden suhteen! Sileys: käänteiskuvauslause!

$$\tilde{c}'(s) = c'(\varphi^{-1}(s))\,\varphi^{-1\,\prime}(s) = c'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

$\Rightarrow \|\tilde{c}'(s)\| = 1 \quad \forall\ s \in [0,L]$. □.

Huom Parametrisointi kaarenpituuden suhteen translaatiota

$s \mapsto \pm s + s_0$ vaille 1-käsitteinen vrt. HT: sään. polun

pituus riippumaton parametrisoinnista.

1.2. Lemma Jos säännöllinen polku c parametri-

soitu kaarenpituuden suhteen, niin $c''(t) \perp c'(t)$

$\forall\ t \in [0,L]$.

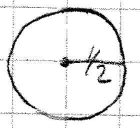
Tod: $\|c'(t)\| = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(c'(t)\cdot c'(t))$

$= c''(t)\cdot c'(t) + c'(t)\, c''(t) = 2c''(t)\cdot c'(t)$

$\Rightarrow c''(t)\cdot c'(t) = 0$ □.

Esim. (1) Suoran standardi parametrisointi $t \mapsto c(t) = (at, bt)$ on parametrisointi kaarenpituuden suhteen joss $\|c'(t)\| = \|(a,b)\| = (a^2+b^2)^{1/2} = 1$
$\iff a^2+b^2 = 1$

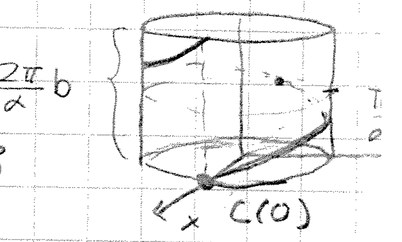
(2) ympyrä $t \mapsto c(t) = \frac{1}{2}(\cos 2t, \sin 2t)$ $\quad t \in [0, \pi]$



$c'(t) = (-\sin 2t, \cos 2t) \Rightarrow \|c'(t)\| = 1$ param. kaarenpit. suht.

(3) (ympyrä) spiraali $t \mapsto c(t) = (a\cos\alpha t, a\sin\alpha t, bt)$

$c'(t) = (-a\alpha\sin\alpha t, a\alpha\cos\alpha t, b)$



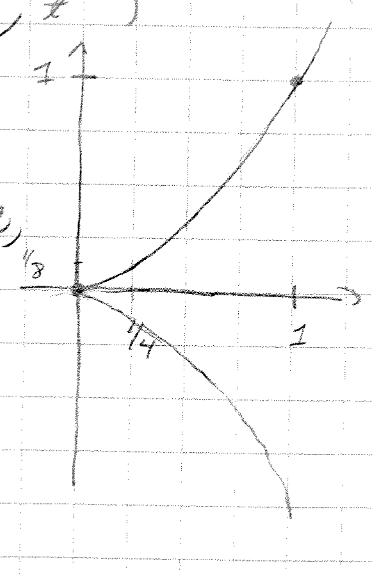
$\Rightarrow \|c'(t)\| = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} \equiv$ vakio $=: \beta$

$s \mapsto \tilde{c}(s) = \left(a\cos\frac{\alpha}{\beta}s,\ a\sin\frac{\alpha}{\beta}s,\ \frac{b}{\beta}s\right)$ parametrisointi kaarenpit. suhteen

Geometrisesti: Pisteen $c(0) = (a,0,0)$ rata ruuvilikkeessä

$$a_t: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{pyöritys } xy\text{-tasossa}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bt \end{pmatrix}}_{\text{siirto}}$$

(4) Neilin paraabeli $t \mapsto c(t) = (t^2, t^3)$



$c'(t) = (2t, 3t^2)$

$c'(0) = (0,0)$ ei säännöllinen parametrisointi,

ei tangenttia origossa.

<u>Huom</u> siis <u>sileä</u> parametrisointi

2. Kaarevuus ja torsio

<u>Määritelmä</u> Olkoon $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku. Sen <u>kaarevuus</u> pisteessä $t \in [a,b]$ on (2.1.)

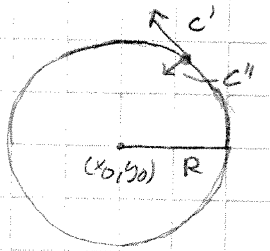
$$\varkappa(t) = \| c''(t) \| .$$

<u>Esim</u> $t \mapsto c(t) = (x_0 + R\cos\frac{t}{R},\ y_0 + R\sin\frac{t}{R},\ 0)$

(x_0, y_0)-keskinen R-säteinen ympyrä $t \in [0, 2\pi R]$

$$c'(t) = \left(-\sin\frac{t}{R},\ \cos\frac{t}{R},\ 0\right), \quad \|c'(t)\| = 1$$

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{t}{R},\ -\frac{1}{R}\sin\frac{t}{R},\ 0\right), \quad \|c''(t)\| = \frac{1}{R} \equiv \varkappa$$



<u>Muistutus</u>: Lemma 1.2 : $c' \perp c''$ kun c parametrisoitu kaarenpit. suhteen.

Kaarevuus oltava riippumaton parametrisoinnista. Jos c ei määritelty kaarenpit. suhteen, niin pätee:

2.1. <u>Lause</u> Ol. c $\mathbb{R}^3$:n säännöllinen polku. Tällöin sen kaarevuudelle pätee $\varkappa = \dfrac{\|c'' \times c'\|}{\|c'\|^3}$

<u>Tod</u>: Olkoon $c(t) = \tilde{c}(\psi(t))$, missä $s = \psi(t)$ parametri kaarenpituuden suhteen. Polun $\tilde{c}$ kaarevuus pisteessä s:

$$\varkappa(s) = \|\tilde{c}''(s)\| = \frac{\|\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|^3}, \text{ sillä } \|\tilde{c}'\| = 1$$

ja L.1.2 : $\tilde{c}'' \perp \tilde{c}'$.

Pätee: $c'(t) = \tilde{c}'(\psi(t))\,\psi'(t) \Rightarrow \tilde{c}'(s) = \dfrac{c'(t)}{\psi'(t)}$ $(\psi' = \|c'\|$ > 0 (L

ja

$$c''(t) = \tilde{c}''(\psi(t))\,(\psi'(t))^2 + \tilde{c}'(\psi(t))\,\psi''(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{c}''(s) = \frac{c''(t)}{(\psi'(t))^2} - \frac{\tilde{c}'(s)\,\psi''(t)}{(\psi'(t))^2} = \frac{c''(t)}{(\psi'(t))^2} - \frac{c'(t)\,\psi''(t)}{(\psi'(t))^3}$$

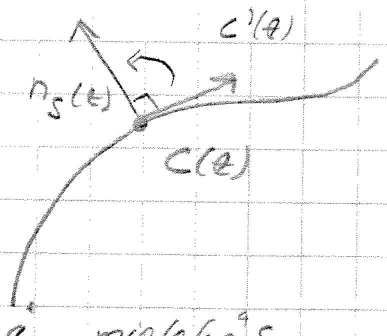
$$\Rightarrow \tilde{c}''(s)\times\tilde{c}'(s) = \frac{c''(t)\times c'(t)}{(\varphi'(t))^3} - \underbrace{c'(t)\times c'(t)}_{=0}\,\frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^4}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{c}''(s)\times\tilde{c}'(s)\| = \frac{\|c''(t)\times c'(t)\|}{\varphi'(t)^3},$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = \frac{\|\tilde{c}''(s)\times\tilde{c}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|^3} \qquad \left(\|\tilde{c}'(s)\| = \frac{\|c'(t)\|}{\varphi'(t)}\right)$$

$$= \frac{\|c''(t)\times c'(t)\|}{\|c'(t)\|^3}. \quad \square$$

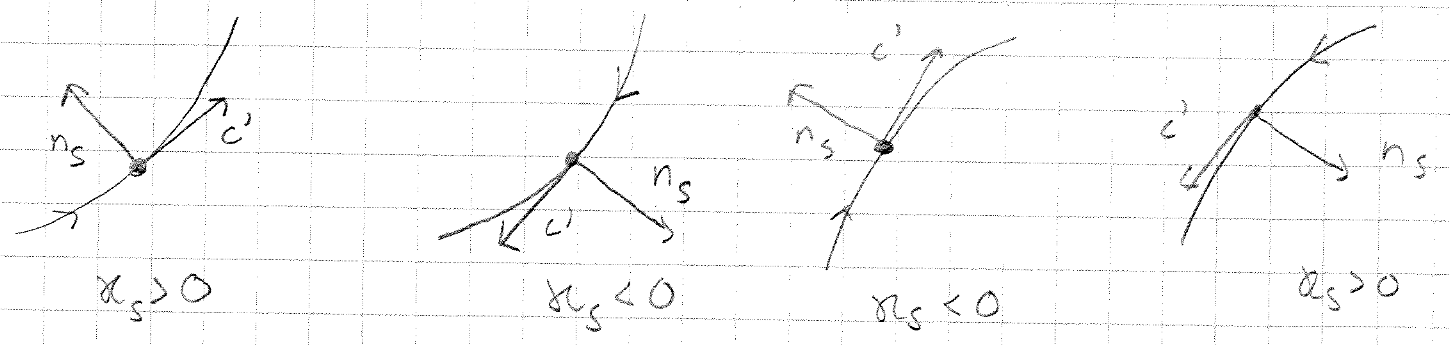
<u>Määritelmä</u> Jos c on kaarenpituuden suhteen parametrisoitu tasopolku $|c|\subset\mathbb{R}^2$, niin voidaan erikseen määritellä polun c:n <u>suunnattu kaarevuus</u> κ_s ehdosta $c'' = \kappa_s n_s$, missä $n_s(t)$ on pisteeseen $c(t)$ liittyvä normaalivektori, joka saadaan kiertämällä tangenttivektoria $c'(t)$ kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan.



Tällöin $\|n_s\| = 1$ ja

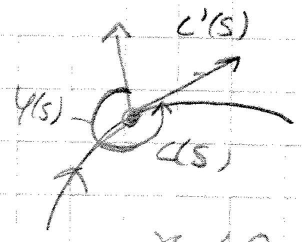
$$\kappa = \|c''\| = \|\kappa_s n_s\| = |\kappa_s|$$

<u>Huom.</u> Lemma 1.2 $\Rightarrow$ κ_s:in määritelmä mielekäs



Tasokäyrän suunnistetun kaarevuuden $\varkappa_s$ geometrinen tulkinta:

2.2. <u>Lause</u> Ol. c kaarenpituuden suhteen parametrisoitu tasokäyrä ja $\varphi(s)$ kiinteän yksikkövektorin ja tangenttivektorin $c'(s)$ välinen kulma pisteessä $c(s)$ vs. positiivinen kiertosuunta.

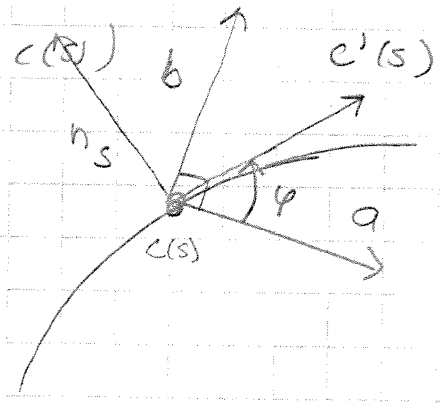


Tällöin pätee $\varkappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$.

<u>Huom</u>
- $\varphi \in [0, 2\pi)$ mod 2π
- $\frac{d\varphi}{ds}$ mielekäs
- $\varkappa_s > 0 \iff c'$ pyörii positiiviseen kiertosuuntaan kun s kasvaa

  $\varkappa_s < 0 \iff c'$ " negatiiviseen "

Tod: Olk. a kiinteä yksikkö vektori (pist. $c(s)$) ja b vektori, joka saadaan vektorista a kiertämällä kulman $\pi/2$ positiiviseen kiertosuuntaan.



Tällöin pätee $c'(s) = a\cos\varphi(s) + b\sin\varphi(s)$.

$$\Rightarrow c''(s) = (-a\sin\varphi(s) + b\cos\varphi(s))\,\varphi'(s)$$

$$\Rightarrow \varkappa_s n_s \cdot a = c''(s)\cdot a = -(\sin\varphi(s))\,\varphi'(s)$$

$$\measuredangle(n_s, a) = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow n_s \cdot a = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \varkappa_s = \varphi'(s). \square$$

Kysymys: Jos suunnistettu kaarevuus tunnetaan, määrääkö se käyrän 1-käsitteisesti?

Vast: Oleellisesti kyllä, tason jäykkää liikettä vaille 1-kas

Määritelmä Tason jäykkä liike on muotoa

$M = T_a \circ R_\theta$, missä R_θ on tason kierto kulman θ verran positiiviseen kiertosuuntaan

$$R_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta) \text{ ja}$$

T_a on translaatio $T_a(v) = v + a \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

2.3. Lause Olkoon $k : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ sileä funktio. Tällöin löytyy kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku $c : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^2$, jonka suunnistettu kaarevuus $\varkappa_s(t) = k(t) \ \forall\ t \in (\alpha,\beta)$. Jos $\tilde{c} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^2$ on jokin toinen kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku, jonka suunnistettu kaarevuus $= k(t)$ $\forall\, t \in (\alpha,\beta)$, niin löytyy tason jäykkä liike s.e.

$\tilde{c}(t) = M(c(t)) \quad \forall \quad t \in (\alpha,\beta)$.

Tod: Konstruoidaan ensin c: Olkoon $t_0 \in (\alpha,\beta)$ ja aset

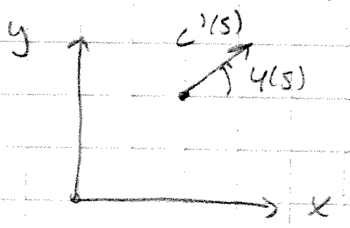
$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} k(u)\,du \qquad \text{(vrt. 2.2.)} \qquad \text{ja}$$

(2.5)

$$c(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \cos \varphi(u)\,du ,\ \int_{t_0}^{t} \sin \varphi(u)\,du \right) \text{ jolloin}$$

$$c'(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$$

(Lauseen 2.2. tod. idean mukaisesti kun a, b rast. x, y koordinaatteja)



Nyt $\|c'(t)\| = 1$ ja Lause 2.2. ⇒

$$\kappa_c(t) = \varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} k(u)\,du \right) = k(t). \Rightarrow \text{ens. väite}$$

Olk. $\tilde{c}$ toinen lauseen mukainen polku ja $\tilde{\varphi}(t)$ positiivisen x-akselin ja $\tilde{c}'(t)$:n välinen kulma pisteessä $\tilde{c}(t)$. Nyt

$$\tilde{c}'(t) = (\cos \tilde{\varphi}(t), \sin \tilde{\varphi}(t))$$

⇒

(2.4) $$\tilde{c}(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \cos \tilde{\varphi}(t) ,\ \int_{t_0}^{t} \sin \tilde{\varphi}(t) \right) + \tilde{c}(t_0).$$

Lause 2.2. ⇒ $$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = k(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(t) = \int_{t_0}^{t} k(u)\,du + \tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(t) + \tilde{\varphi}(t_0)$$

Kirj. $a := \tilde{c}(t_0)$, $\theta := \tilde{\varphi}(t_0)$

$$\overset{(2.4)}{\Rightarrow} \tilde{c}(t) =$$

$$T_a\left(\int_{t_0}^{t} \cos \tilde{\varphi}(u)\,du, \int_{t_0}^{t} \sin \tilde{\varphi}(u)\,du \right) = T_a\left(\int_{t_0}^{t} \cos(\varphi(u) + \theta)\,du, \int_{t_0}^{t} \sin(\varphi(u) +\right.$$

$$= T_a\left(\int_{t_0}^{t} (\cos \varphi(u) \cos\theta - \sin \varphi(u) \sin\theta)\,du ,\ \int_{t_0}^{t} (\sin \varphi(u) \cos\theta + \sin\theta \cos \varphi(u))\,d\right.$$

(2.6)

$$= T_a \Big(\cos\theta \int_{t_0}^{t} \cos\psi(u)\,du - \sin\theta \int_{t_0}^{t} \sin\psi(u)\,du,\ \cos\theta \int_{t_0}^{t} \sin\psi(u)\,du + \sin\theta \int_{t_0}^{t} \cos\psi(u)\,du \Big)$$

$$= T_a R_\theta \Big(\int_{t_0}^{t} \cos\psi(u)\,du,\ \int_{t_0}^{t} \sin\psi(u)\,du \Big) = T_a R_\theta (c(s)). \square$$

<u>Esim</u> Osoitetaan, että jos tason säännöllisen polun

kaarevuus $\kappa \equiv$ vakio $\neq 0$, niin sen jälki

on osa ympyrän kaarta. $\Rightarrow \kappa_s = \pm \kappa$

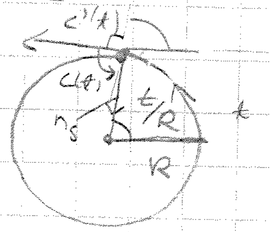
κ_s jatkuva $\Rightarrow \kappa_s \equiv \kappa$ tai $\kappa_s \equiv -\kappa$.

R-säteisen ympyrän parametrisointi kaarenpituuden

suhteen: $c: t \mapsto (R\cos\frac{t}{R}, R\sin\frac{t}{R})$ (posit. kiertosuunta)

$c'(t) = (-\sin\frac{t}{R}, \cos\frac{t}{R})$ $\quad \|c'(t)\| = 1$

$c''(t) = (-\frac{1}{R}\cos\frac{t}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{t}{R})$



$\kappa = \|c''(t)\| = \frac{1}{R}$

$n_s = (-\sin(\frac{t}{R} + \frac{\pi}{2}), \cos(\frac{t}{R} + \frac{\pi}{2}))$

$= (-\cos\frac{t}{R}, -\sin\frac{t}{R}) \quad \parallel c''$

$\Rightarrow \kappa_s = \frac{1}{R}$

L. 2.3. $\Rightarrow$ Muiden polkujen, joilla $\kappa_s = \frac{1}{R}$, jälki on

ympyrän kaari, sillä translaatio T_a ja rotaatio

R_θ säilyttävät ympyrät ympyröinä.

Tapaus $\kappa_s < 0$: polulla $\tilde{c}: t \mapsto (R\cos\frac{t}{R}, -R\sin\frac{t}{R})$
(parametrisointi negatiiviseen kiertosuuntaan)