JOHDATUS DIFFERENTIAALIGEOMETRIAAN

Mat-1.3530 Käyrät ja pinnat

Luennot: ti 10–12 U322
K. Peltonen to 12–14

Harjoitukset: pe 12–14 U356
Juha-Matti Perkkiö (alkaen 26.1.)

Suoritus: 2 välikoetta (2 × 24p)
+ harjoituspisteet (24p)
tai tentti
tai harjoitustyö

1. välikoe la 3.3. 10–13
2. välikoe la 14.4. 10–13

Kurssimateriaali:

luentomoniste
A. Pressley: Elementary differential geometry, Springer

Tavoitteet:

- yleissivistys 'geometrian perusteet'
- konkreettinen kysymyksenasettelu: käyrät ja pinnat $\mathbb{R}^3$:ssa
→ abstraktin monistojen teorian motivointi
yhteydet sovelluksiin ja muuhun matematiikkaan

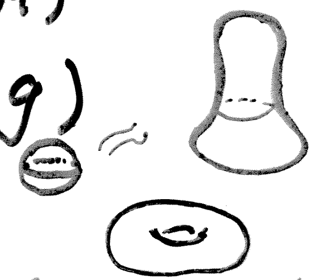
Sisältö:

I Käyrät (~ 3 vk)
1. Taso- ja avaruuskäyrät
2. Kaarevuus ja torsio
3. Käyrien globaalia teoriaa

II Pinnat (~ 8 vk)
1. $\mathbb{R}^3$:n pinnat
2. Ensimmäinen perusmuoto
3. Pinnan kaarevuus
4. Gaussin kuvaus
5. Gauss–Bonnet pinnoille

Gauss - Bonnet

$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1-g)$$



$g=0$ $(\chi=2) \iff M \approx S^2$
$g=1$ $(\chi=0) \iff M \approx T^2$
$g \geq 2$ $(\chi<0) \iff M$ "g-reikäinen pinta"

$g=2$ $\quad$ $g=3$

Mistä nimi?

1812 Poisson $\quad \int_M K\,dA$ = vakio (variaatiossa
1815 Rodrigues $\quad$ erikoistapauksia
→ 1888 Dyck (+ Kronecker 1869) $\mathbb{R}^3$:n upotetuille pinnoille
→ 1903 Boy triangulaatioille
1921 Blaschke "folk theorem"
1938 van Kampen
1944 Chern käsitteellinen todistus

Gauss
- kaarevuus K
- pinnan sisäinen invariantti

Bonnet
- erikoistapauksia
- ei karakteristikan käsitettä

Differentiaaligeometria $\quad$ Mat - 1.3530

Johdatus differentiaaligeometriaan:

Käyrät ja pinnat

Kevät 2007 $\quad$ K. Peltonen / Juha-Matti Perkkiö

Sisältö:

I Käyrät

1. Taso- ja avaruuskäyrät

(1.1)

Määritelmä

Polku on jatkuva kuvaus $c: I=[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $a<$

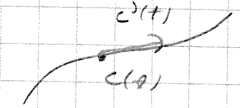
Käyrä on polun c kuvajoukko $c(I)\subset\mathbb{R}^n$; merk. usein myös $|c|$.

Huom Polku $\hat{=}$ Käyrä + jnk parametrisointi

Säännöllinen polku on polku $c: I\to\mathbb{R}^n$ s.e. pätee:

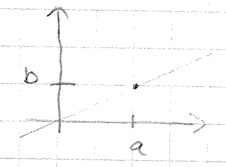
(1) $\exists\ c'(t), c''(t), \dots, c^{(k)}(t), \dots$ (päätepisteissä toispuoleisesti) $\forall\ k\in\mathbb{N}$, $\forall\ t\in I=[a,b]$.

(2) $c'(t)\neq 0$ $\forall\ t$ $[a,b]$



Esim $t\mapsto c(t)=(at,bt)$

suoran standardi parametrisointi (sään. polku



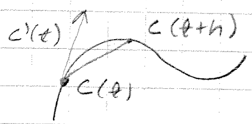
$s\mapsto\tilde{c}(s)=(as^3,bs^3)$ ei sään.

kuitenkin $|c|=|\tilde{c}|$ sama käyrä

Määritelmä Polun c pituus $\ell(c)=\int_a^b\|c'(t)\|dt$,

missä $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$:in tavallinen normi

Tulkinta: $c'(t)$ on polun pisteeseen $c(t)$ liittyvä tangenttivektori



$$c(t+h)-c(t)=c'(t)h+h\underbrace{\varepsilon(t,h)}_{\to 0 \text{ kun } h\to 0}$$

Määritelmä Käyrän parametrisointi kaarenpituuden suhteen on säännöllinen polku $t\mapsto c(t)$ s.e. pätee $\|c'(t)\|=1$ $\forall\ t\in[a,b]$.

(1.2.)

1.1. Lause Säännöllinen polku voidaan parametrisoida kaarenpituuden suhteen.

Tod: Ol. $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ sään. polku. Sen pituus $L=\ell(c)=\int_a^b\|c'(t)\|dt$. Aset. parametriväli $[0,L]$ ja kuvaus $\gamma:[a,b]\to[0,L]$ s.e. $s=\gamma(t)=\int_a^t\|c'(\tilde{t})\|d\tilde{t}$

Pätee: $\gamma'(t)=\|c'(t)\|\neq 0$ $(\tilde{t}\mapsto\|c'(\tilde{t})\|$ jatkuva$)$.

Siis $t\mapsto\gamma(t)$ aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio $\gamma^{-1}:[0,L]\to[a,b]$.

Polku $s\mapsto\tilde{c}(s):=c(\gamma^{-1}(s))$ on sileä parametrisointi kaarenpituuden suhteen! Sileys: käänteiskuvauslause!

$$\tilde{c}'(s)=c'(\gamma^{-1}(s))\,\gamma^{-1\prime}(s)=c'(t)\frac{1}{\gamma'(t)}=\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

$\Rightarrow \|\tilde{c}'(s)\|=1$ $\forall\ s\in[0,L]$. □

Huom Parametrisointi kaarenpituuden suhteen translaatiota $s\mapsto\pm s+s_0$ vaille 1-käsitteinen vrt. HT: sään. polun pituus riippumaton parametrisoinnista.

1.2. Lemma Jos säännöllinen polku c parametrisoitu kaarenpituuden suhteen, niin $c''(t)\perp c'(t)$ $\forall\ t\in[0,L]$.

Tod: $\|c'(t)\|=1 \Rightarrow 0=\frac{d}{dt}(1)=\frac{d}{dt}(c'(t)\cdot c'(t))$

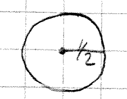
$= c''(t)\cdot c'(t)+c'(t)\,c''(t) = 2c''(t)\cdot c'(t)$

$\Rightarrow c''(t)\cdot c'(t)=0$ □.

Esim. (1) Suoran standardi parametrisointi (1.3.)

$t \mapsto c(t) = (at, bt)$ on parametrisointi kaarenpituuden suhteen joss $\|c'(t)\| = \|(a,b)\| = (a^2+b^2)^{1/2} = 1$
$\iff a^2+b^2 = 1$

(2) ympyrä $t \mapsto c(t) = \frac{1}{2}(\cos 2t, \sin 2t)$ $t \in [0,\pi]$

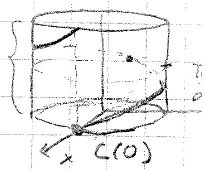


$c'(t) = (-\sin 2t, \cos 2t) \Rightarrow \|c'(t)\| = 1$ param. kaarenpit. suht.

(3) (ympyrä) spiraali $t \mapsto c(t) = (a\cos\alpha t, a\sin\alpha t, bt)$

$c'(t) = (-a\alpha\sin\alpha t, a\alpha\cos\alpha t, b)$

$\Rightarrow \|c'(t)\| = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} = \text{vakio} =: \beta$



$s \mapsto \tilde{c}(s) = \left(a\cos\frac{\alpha}{\beta}s,\ a\sin\frac{\alpha}{\beta}s,\ \frac{bs}{\beta}\right)$ parametrisointi kaarenpit. suhteen

Geometrisesti: Pisteen $c(0) = (a,0,0)$ rata ruuviliikkeessä

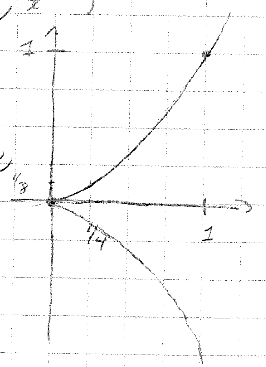
$$a_t: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{pyöritys } xy\text{-tasossa}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bt \end{pmatrix}}_{\text{siirto}}$$

(4) Neilin paraabeli $t \mapsto c(t) = (t^2, t^3)$

$c'(t) = (2t, 3t^2)$

$c'(0) = (0,0)$ ei sään parametrisointi,

ei tangenttia origossa.



Huom sillä sileä parametrisointi

2. Kaarevuus ja torsio

Määritelmä Olkoon $c: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku. Sen kaarevuus pisteessä $t \in [a,b]$ on (2.1.)

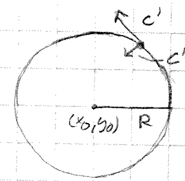
$$\kappa(t) = \|c''(t)\|.$$

Esim $t \mapsto c(t) = \left(x_0 + R\cos\frac{t}{R},\ y_0 + R\sin\frac{t}{R},\ 0\right)$

(x_0,y_0)-keskinen R-säteinen ympyrä $t \in [0, 2\pi R]$

$c'(t) = \left(-\sin\frac{t}{R}, \cos\frac{t}{R}, 0\right)$, $\|c'(t)\| = 1$

$c''(t) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{t}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{t}{R}, 0\right)$, $\|c''(t)\| = \frac{1}{R} \equiv \kappa$



Muistutus: Lemma 1.2: $c' \perp c''$ kun c parametrisoitu kaarenpit. suhteen.

Kaarevuus oltava riippumaton parametrisoinnista. Jos c ei määritelty kaarenpit. suhteen, niin pätee:

2.1. Lause Ol. c $\mathbb{R}^3$:n säännöllinen polku.

Tällöin sen kaarevuudelle pätee $\kappa = \dfrac{\|c'' \times c'\|}{\|c'\|^3}$

Tod: Olkoon $c(t) = \tilde{c}(\varphi(t))$, missä $s = \varphi(t)$ parametri kaarenpituuden suhteen. Polun $\tilde{c}$ kaarevuus pisteessä s:

$\kappa(s) = \|\tilde{c}''(s)\| = \dfrac{\|\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|^3}$, sillä $\|\tilde{c}'\| = 1$

ja L. 1.2: $\tilde{c}'' \perp \tilde{c}'$.

Pätee: $c'(t) = \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow \tilde{c}'(s) = \dfrac{c'(t)}{\varphi'(t)}$ $(\varphi' = \|c'\|$ > 0

ja

$c''(t) = \tilde{c}''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi''(t)$

$\Rightarrow \tilde{c}''(s) = \dfrac{c''(t)}{(\varphi'(t))^2} - \dfrac{\tilde{c}'(s)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} = \dfrac{c''(t)}{(\varphi'(t))^2} - \dfrac{c'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$

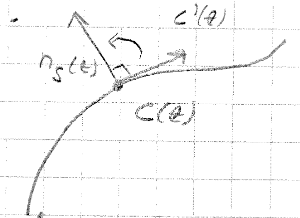
$\Rightarrow \tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s) = \frac{c''(t) \times c'(t)}{(\varphi'(t))^3} - \underbrace{c'(t)\times c'(t)}_{=0} \frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^4}$

$\Rightarrow \|\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s)\| = \frac{\|c''(t) \times c'(t)\|}{\varphi'(t)^3}$,

$\Rightarrow \kappa(s) = \frac{\|\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|^3}$ $\left(\|\tilde{c}'(s)\| = \frac{\|c'(t)\|}{\varphi'(t)} \right)$

$= \frac{\|c''(t) \times c'(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$. □

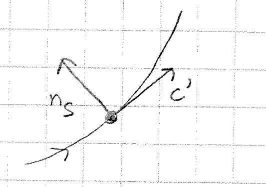
Määritelmä Jos c on kaarenpituuden suhteen parametrisoitu tasopolku $|c| \subset \mathbb{R}^2$, niin voidaan erikseen määritellä polun c:n suunnattu kaarevuus κ_s ehdosta $c'' = \kappa_s n_s$, missä $n_s(t)$ on pisteeseen $c(t)$ liittyvä normaalivektori, joka saadaan kiertämällä tangenttivektoria $c'(t)$ kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan.



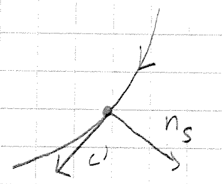
Tällöin $\|n_s\| = 1$ ja

$\kappa = \|c''\| = \|\kappa_s n_s\| = |\kappa_s|$

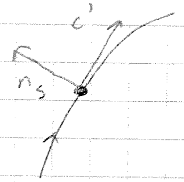
Huom. Lemma 1.2 ⇒ κ_s:in määritelmä mielekäs



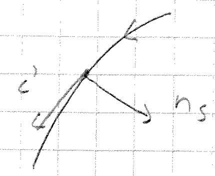
$\kappa_s > 0$



$\kappa_s < 0$



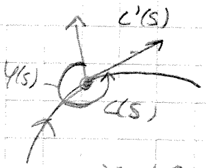
$\kappa_s < 0$



$\kappa_s > 0$

Tasokäyrän suunnistetun kaarevuuden κ_s geometrinen tulkinta:

2.2. Lause Ol. c kaarenpituuden suhteen parametrisoitu tasokäyrä ja $\varphi(s)$ kiinteän yksikkövektorin ja tangenttivektorin $c'(s)$ välinen kulma pisteessä $c(s)$ vs. positiivinen kiertosuunta.



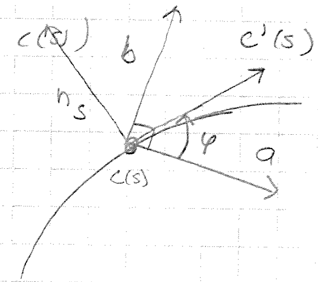
Tällöin pätee $\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$.

$\kappa_s < 0$

Huom
- $\varphi \in [0, 2\pi)$ mod 2π
- $\frac{d\varphi}{ds}$ mielekäs
- $\kappa_s > 0 \Leftrightarrow c'$ pyörii positiiviseen kiertosuuntaan kun s kasvaa

  $\kappa_s < 0 \Leftrightarrow c'$ " negatiiviseen "

Tod: Olk. a kiinteä yksikkö vektori (pist. $c(s)$) ja b vektori, joka saadaan vektorista a kiertämällä kulman $\pi/2$ positiiviseen kiertosuuntaan.



Tällöin pätee $c'(s) = a \cos\varphi(s) + b \sin\varphi(s)$.

$\Rightarrow c''(s) = (-a \sin\varphi(s) + b \cos\varphi(s))\, \varphi'(s)$

$\Rightarrow \kappa_s n_s \cdot a = c''(s) \cdot a = -(\sin\varphi(s))\, \varphi'(s)$

$\measuredangle(n_s, a) = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow n_s \cdot a = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi$

$\Rightarrow \kappa_s = \varphi'(s)$. □

Kysymys: Jos suunnistettu kaarevuus tunnetaan, määrääkö se käyrän 1-käsitteisesti?

Vast: Oleellisesti kyllä, tason jäykkää liikettä vaille 1-käs

Määritelmä Tason jäykkä liike on muotoa

$M = T_a \circ R_\theta$, missä R_θ on tason kierto

kulman θ verran positiiviseen kiertosuuntaan

$$R_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta) \text{ ja}$$

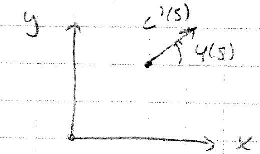
T_a on translaatio $T_a(v) = v + a \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

2.3. Lause Olkoon $k : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ sileä funktio. Tällöin löytyy kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku $c : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^2$, jonka suunnistettu kaarevuus $\kappa_s(t) = k(t) \ \forall t \in (\alpha,\beta)$. Jos $\tilde{c} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^2$ on jokin toinen kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku, jonka suunnistettu kaarevuus $= k(t)$ $\forall t \in (\alpha,\beta)$, niin löytyy tason jäykkä liike s.e. $\tilde{c}(t) = M(c(t)) \quad \forall \quad t \in (\alpha,\beta)$.

Tod: Konstruoidaan ensin c: Olkoon $t_0 \in (\alpha,\beta)$ ja aset. $\psi(t) = \int_{t_0}^{t} k(u)\,du$ (vrt. 2.2.) ja

$$c(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \cos\psi(u)\,du,\ \int_{t_0}^{t} \sin\psi(u)\,du\right) \text{ jolloin}$$

$$c'(t) = (\cos\psi(t), \sin\psi(t))$$ (Lauseen 2.2. tod. idean mukaisesti kun a, b rast. x, y koordinaatteja)



Nyt $\|c'(t)\| = 1$ ja Lause 2.2. $\Rightarrow$

$$\kappa_s(t) = \psi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} k(u)\,du\right) = k(t). \quad \Rightarrow \text{ ens. väite}$$

Olk. $\tilde{c}$ toinen lauseen mukainen polku ja $\tilde{\psi}(t)$ positiivisen x-akselin ja $\tilde{c}'(t)$:n välinen kulma pisteessä $\tilde{c}(t)$. Nyt

$$\tilde{c}'(t) = (\cos\tilde{\psi}(t), \sin\tilde{\psi}(t))$$

$\Rightarrow$

(2.4) $$\tilde{c}(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \cos\tilde{\psi}(t),\ \int_{t_0}^{t} \sin\tilde{\psi}(t)\right) + \tilde{c}(t_0).$$

Lause 2.2. $\Rightarrow$ $\dfrac{d\tilde{\psi}}{dt} = k(t)$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(t) = \int_{t_0}^{t} k(u)\,du + \tilde{\psi}(t_0) = \psi(t) + \tilde{\psi}(t_0)$$

Kirj. $a := \tilde{c}(t_0)$, $\theta := \tilde{\psi}(t_0)$

$\overset{(2.4)}{\Rightarrow}$ $\tilde{c}(t) =$

$$T_a\left(\int_{t_0}^{t} \cos\tilde{\psi}(u)\,du, \int_{t_0}^{t} \sin\tilde{\psi}(u)\,du\right) = T_a\left(\int_{t_0}^{t} \cos(\psi(u)+\theta)\,du, \int_{t_0}^{t} \sin(\psi(u)+\right.$$

$$= T_a\left(\int_{t_0}^{t} (\cos\psi(u)\cos\theta - \sin\psi(u)\sin\theta)\,du,\ \int_{t_0}^{t} (\sin\psi(u)\cos\theta + \sin\theta\cos\psi(u))\right.$$

2.6

$$= T_a\left(\cos\theta\int_{t_0}^{t}\cos\psi(u)\,du - \sin\theta\int_{t_0}^{t}\sin\psi(u)\,du,\ \cos\theta\int_{t_0}^{t}\sin\psi(u)\,du + \sin\theta\int_{t_0}^{t}\cos\psi(u)\,du\right)$$

$$= T_a R_\theta\left(\int_{t_0}^{t}\cos\psi(u)\,du,\ \int_{t_0}^{t}\sin\psi(u)\,du\right) = T_a R_\theta\,(c(s)).\ \square$$

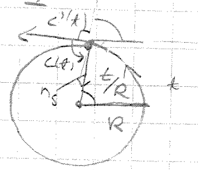
Esim. Osoitetaan, että jos tason säännöllisen polun kaarevuus $\varkappa \equiv$ vakio $\neq 0$, niin sen jälki on osa ympyrän kaarta. $\Rightarrow \varkappa_s = \pm\varkappa$

$\varkappa_s$ jatkuva $\Rightarrow \varkappa_s \equiv \varkappa$ tai $\varkappa_s \equiv -\varkappa$.

R-säteisen ympyrän parametrisointi kaarenpituuden suhteen: $c: t \mapsto \left(R\cos\frac{t}{R}, R\sin\frac{t}{R}\right)$ (posit. kiertosuunta

$c'(t) = \left(-\sin\frac{t}{R}, \cos\frac{t}{R}\right)$ $\qquad \|c'(t)\| = 1$

$c''(t) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{t}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{t}{R}\right)$



$\varkappa = \|c''(t)\| = \frac{1}{R}$

$n_s = \left(-\sin\left(\frac{t}{R}+\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{R}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \left(-\cos\frac{t}{R}, -\sin\frac{t}{R}\right) \uparrow\uparrow c''$

$\Rightarrow \varkappa_s = \frac{1}{R}$

L. 2.3. $\Rightarrow$ Muiden polkujen, joilla $\varkappa_s = \frac{1}{R}$, jälki on ympyrän kaari, sillä translaatio T_a ja rotaatio R_θ säilyttävät ympyrät ympyröinä.

Tapaus $\varkappa_s < 0$: polulla $\tilde{c}: t \mapsto \left(R\cos\frac{t}{R}, -R\sin\frac{t}{R}\right)$ (parametrisointi negatiiviseen kiertosuuntaan)

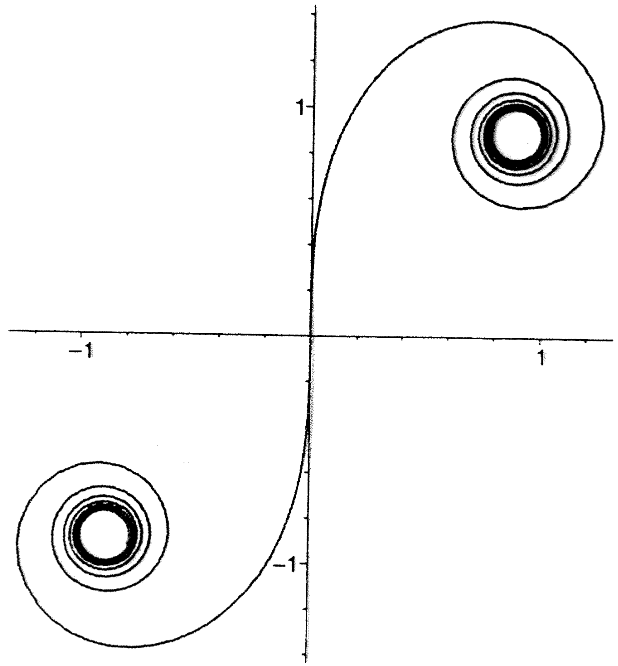


Figure 2.4: Cornu spiral with constant κ/s

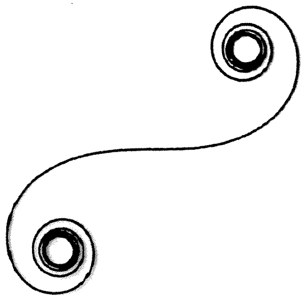


Fig. 1. $\kappa = s$

Fig. 2. $\kappa = s^2$

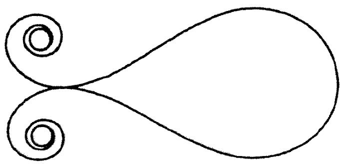


Fig. 3. $\kappa = s^2 - 2.19$

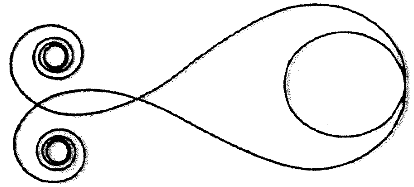


Fig. 4. $\kappa = s^2 - 4$

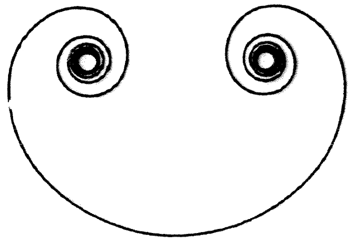


Fig. 5. $\kappa = s^2 + 1$

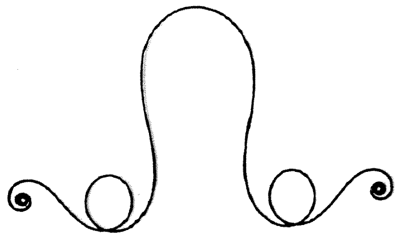
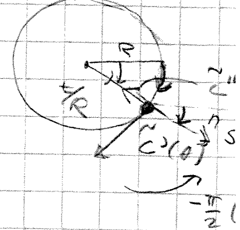


Fig. 6. $\kappa = 5s^4 - 18s^2 + 5$

$\tilde c'(t) = \left(-\sin\frac{t}{R}, -\cos\frac{t}{R}\right)$ $\qquad \|\tilde c'(t)\| = 1$

$\tilde c''(t) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{t}{R}, +\frac{1}{R}\sin\frac{t}{R}\right)$

$\|\tilde c''(t)\| = \frac{1}{R}$



$n_s = \left(-\sin\left(\frac{t}{R}-\frac{\pi}{2}\right), -\cos\left(\frac{t}{R}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\quad = \left(+\cos\frac{t}{R}, -\sin\frac{t}{R}\right) \uparrow\downarrow \tilde c''(t)$

$\Rightarrow \kappa_s = -\frac{1}{R}$

L.2.3 $\Rightarrow$ myös muiden polkujen, joilla $\kappa_s = -\frac{1}{R}$ jälki on ympyrä. □

Huom
Avaruudessa kaarevuus κ ei enää riitä erottelemaan käyriä.
Esim. Ympyräspiraalille (esim 1(3)) $c: c(t) = \left(\frac{R}{2}\cos\frac{\sqrt2}{R}t, \frac{R}{2}\sin\frac{\sqrt2}{R}t, \frac{t}{\sqrt2}\right)$
$\left(a = \frac{R}{2} = b, \alpha = 1 \Rightarrow \beta = \frac{R}{\sqrt2}\right)$

$c'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt2}\sin\frac{\sqrt2}{R}t, \frac{1}{\sqrt2}\cos\frac{\sqrt2}{R}t, \frac{1}{\sqrt2}\right)$ $\qquad \|c'(t)\| = 1$

$c''(t) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{\sqrt2}{R}t, -\frac{1}{R}\sin\frac{\sqrt2}{R}t, 0\right) \Rightarrow \kappa = \|c''(t)\| = \frac{1}{R}$

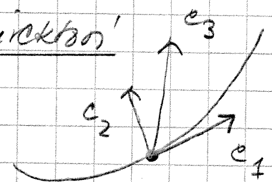
kuten tason R-säteiselle ympyrälle!

Tarvitaan lisäinformaatiota antaa torsio, joka mittaa käyrän poikkeamaa tasokäyrästä.

Määritelmä Ol. c $\mathbb{R}^3$:n sään. polku, joka parametrisoitu kaarenpituuden suhteen. Jos lisäksi pätee $c''(t) \neq 0$ $\forall t$, niin c on Frenét-käyrä.

Määritelmä Frenét-käyrään c liittyvä Frenét-kehys $\{e_1, e_2, e_3\}$ muodostuu vektoreista

$$(2.5)\quad \begin{cases} e_1 = c' & \text{tangenttivektori} \\ e_2 = \dfrac{c''}{\|c''\|} = \dfrac{c''}{\kappa} & \text{päänormaalivektori} \\ e_3 = e_1 \times e_2 & \text{sivunormaalivektori} \end{cases}$$



Huom järjestetty joukko $\{e_1, e_2, e_3\}$ on $\mathbb{R}^3$:n oikeakätinen ortonormaali kanta $\forall t$:

$e_3 = e_1 \times e_2, \qquad e_1 = e_2 \times e_3, \qquad e_2 = e_3 \times e_1$

(positiivinen kiertovaihtelu).

Johdetaan Frenét yhtälöt: $(2.5) \Rightarrow e_1' = c'' = \kappa e_2 \quad (*)$

$$e_2' = \underbrace{(e_2' \cdot e_1)}_{= -e_1' \cdot e_2}e_1 + \underbrace{(e_2' \cdot e_2)}_{\substack{=0 \\ (L.1.2)}}e_2 + (e_2' \cdot e_3)e_3$$

sillä $e_1 \cdot e_2 = 0$

$\frac{d}{dt} \Rightarrow e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = 0$

$$= -\underbrace{(e_1' \cdot e_2)}_{=\kappa}e_1 + \underbrace{(e_2' \cdot e_3)}_{=:\tau \text{ (merk.)}}e_3 = -\kappa e_1 + \tau e_3$$

$$e_3' = \underbrace{(e_3' \cdot e_1)}_{= -(e_1' \cdot e_3) \overset{(*)}{=} -\kappa\underbrace{(e_2 \cdot e_3)}_{=0}}e_1 + \underbrace{(e_3' \cdot e_2)}_{= -(e_2' \cdot e_3) = -\tau}e_2 + \underbrace{(e_3' \cdot e_3)}_{=0 \text{ (L.1.2)}}e_3 = -\tau e_2$$

$e_1 \cdot e_3 = 0$

sillä $e_2 \cdot e_3 = 0$

Saadaan $\mathbb{R}^3$:n Frenét-yhtälöt: (2.9.)

$$(F3)\quad \boxed{\begin{aligned} e_1' &= \kappa e_2 \\ e_2' &= -\kappa e_1 + \tau e_3 \\ e_3' &= -\tau e_2 \end{aligned}}$$

Matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Määritelmä Funktio $\tau := e_2' \cdot e_3$ on Frenét-käyrän torsio.

Huom Torsio on (e_1, e_2)-tason muutos. Kun $\tau \equiv 0$ saadaan

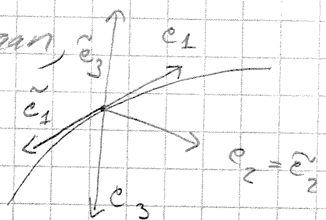
$$\begin{cases} e_1' = \kappa e_2 \\ e_2' = -\kappa e_1 \\ e_3' = 0 \end{cases}$$

eli $e_3 \equiv$ vakio ja saadaan tason $\mathbb{R}^2$ Frenét-yhtälöt

$$(F2)\quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Huom käyrän suunnistuksen muuttaminen ei vaikuta torsioon: Jos $\tilde{c}$ on polku c suunnistettuna vastakkaiseen suuntaan, niin $\tilde{e}_1 = \tilde{c}' = -c' = -e_1$

$$\tilde{e}_2 = \frac{\tilde{c}''}{\|\tilde{c}''\|} = \frac{c''}{\|c''\|} = e_2$$



$$\tilde{e}_3 = \tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2 = -e_1 \times e_2 = -e_3$$

$$\tilde{e}_2' = -e_2' \Rightarrow \tilde{\tau} = \tilde{e}_2' \times \tilde{e}_3 = e_2' \times e_3 = \tau.$$

2.6. Lause Olkoon c $\mathbb{R}^3$:n säännöllinen polku, jolle pätee $c''(t) \neq 0$ $\forall t$. Sen torsio saadaan lausekkeesta

$$\tau = \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2}.$$

Tod: a) Ol. ensin $\|c'\| = 1$. Tällöin (2.10)

$$c'' = \kappa e_2 \Rightarrow c''' = \kappa' e_2 + \kappa e_2'$$

$$c' = e_1 \Rightarrow c' \times c'' = \kappa e_1 \times e_2 = \kappa e_3$$

$$\Rightarrow \|c' \times c''\| = \kappa$$

$e_3 \cdot e_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2} = \frac{\kappa e_3 \cdot (\kappa' e_2 + \kappa e_2')}{\kappa^2} = e_3 \cdot e_2' = \tau.$$

b) Ol. nyt yl. c ja $\tilde{c}(\varphi(t)) = c(t)$, missä $\tilde{c}$ on polun c parametrisointi kaarenpituuden suhteen $s = \varphi(t)$.

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow c'(t) = \tilde{c}'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \Rightarrow \tilde{c}' = \frac{c'}{\varphi'}$$

$$c''(t) = \tilde{c}''(\varphi(t))\,\varphi'(t)^2 + \tilde{c}'(\varphi(t))\,\varphi''(t) = \tilde{c}''(\varphi')^2 + c'\frac{\varphi''}{\varphi'}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}'' = \left(c'' - c'\varphi''/\varphi'\right)/(\varphi')^2$$

$$\Rightarrow \tilde{c}' \times \tilde{c}'' = \frac{1}{(\varphi')^3}\, c' \times c'' \Rightarrow \|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\| = \frac{1}{(\varphi')^3} \|c' \times c''\| \quad (*)$$

$$c'''(t) = \tilde{c}'''(\varphi(t))(\varphi'(t))^3 + 2\tilde{c}''(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\varphi''(t) +$$

$$\tilde{c}''(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\varphi''(t) + \tilde{c}'(\varphi(t))\,\varphi'''(t) = \tilde{c}'''(\varphi')^3 + 3\tilde{c}''\varphi'\varphi'' + \tilde{c}'\ldots$$

$$= \tilde{c}'''(\varphi')^3 + 3\left(\frac{c''}{\varphi'} - c'\frac{\varphi''}{(\varphi')^2}\right)\varphi'' + c'\frac{\varphi'''}{\varphi'}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}''' = \frac{c'''}{(\varphi')^3} - 3\left(\frac{c''}{(\varphi')^4} - \frac{c'\varphi''}{(\varphi')^5}\right)\varphi'' - c'\frac{\varphi'''}{(\varphi')^4}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}''' \cdot (\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \overset{(*)}{=} \frac{1}{(\varphi')^6}\, c''' \cdot (c' \times c'') \qquad (**)$$

$$\tilde{\tau} \overset{a)}{=} \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\|^2} \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2} \qquad \square.$$

Esim 'ympyräspiraali' (1(3)): $c : t \mapsto \left(a\cos\alpha\frac{t}{\beta},\ a\sin\alpha\frac{t}{\beta},\ b\frac{t}{\beta}\right)$

$\beta = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}$

$$e_1 = c'(t) = \left(-\frac{a\alpha}{\beta}\sin\alpha\frac{t}{\beta},\ \frac{a\alpha}{\beta}\cos\alpha\frac{t}{\beta},\ \frac{b}{\beta}\right)$$

$$c''(t) = \left(-a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\cos\alpha\frac{t}{\beta},\ -a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\sin\alpha\frac{t}{\beta},\ 0\right)$$

$$\kappa = \|c''(t)\| = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 a \quad (\text{vo'ol } a > 0)$$

$$e_2 = \frac{c''}{\kappa} = \left(-\cos\alpha\frac{t}{\beta}, -\sin\alpha\frac{t}{\beta}, 0\right)$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a\alpha}{\beta}\sin\alpha\frac{t}{\beta} & \frac{a\alpha}{\beta}\cos\alpha\frac{t}{\beta} & \frac{b}{\beta} \\ -\cos\alpha\frac{t}{\beta} & -\sin\alpha\frac{t}{\beta} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{b}{\beta}\sin\alpha\frac{t}{\beta}, -\frac{b}{\beta}\cos\alpha\frac{t}{\beta}, \frac{a\alpha}{\beta}\right)$$

$$e_2' = \left(\frac{\alpha}{\beta}\sin\alpha\frac{t}{\beta}, \frac{-\alpha}{\beta}\cos\alpha\frac{t}{\beta}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \tau = e_2' \cdot e_3 = \frac{\alpha b}{\beta}$$

$\therefore$ ympyräspiraalille kaarevuus $\kappa = \frac{\alpha^2 a}{\beta^2}$ = vakio

torsio $\tau = \frac{\alpha b}{\beta}$ = vakio

Voidaan ol. $\beta^2 = \alpha^2 a^2 + b^2 = 1$ jolloin

$$\kappa = \alpha^2 a, \quad \tau = \alpha b \Rightarrow 1 = \alpha^2\left(\frac{\kappa}{\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}(\kappa^2+\tau^2).$$

Olk. kääntäen annettu vakiot κ, τ. Tällöin yhtälöillä

(2.7.) $$\begin{cases} \alpha^2 = \kappa^2 + \tau^2 \\ a = \dfrac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} \\ b^2 = \dfrac{\tau^2}{\kappa^2+\tau^2} \end{cases}$$ on 1-käs ratkaisu

Saatiin: $\mathbb{R}^3$:n Frenét käyrä, jolla vakiokaarevuus ja vakiotorsio on ympyräspiraalin kaari. Tapauksessa $\tau = 0$ ympyrän kaari.

Alkuarvot: $c(0) = (a, 0, 0)$
$c'(0) = (0, a\alpha, b)$
$c''(0) = (-a\alpha^2, 0, 0)$ □.

Vastaava tulos pätee yleisesti:

2.7. Lause Ol. c ja $\tilde{c}$ $\mathbb{R}^3$:n Frenét-käyrää, joilla samat kaarevuusfunktio $t \mapsto \kappa(t)$ ja torsio $t \mapsto \tau(t)$. Tällöin c ja $\tilde{c}$ ovat $\mathbb{R}^3$:n jäykkää liikettä (= kierto ja siirto) M vaille samat eli pätee $\tilde{c}(t) = M(c(t))\ \forall t$.

Jos τ, κ ovat mv. sileitä funktioita $\kappa > 0$, niin löytyy Frenét-käyrä, jonka kaarevuus on κ ja torsio on τ.

Tod: Ol $\{e_1, e_2, e_3\}$ c:n ja $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ $\tilde{c}$:n Frenét-kehykset. Olk. t_0 jokin parametriarvo. Sovellamalla jäykkää liikettä oikeakätisiin ortonorm. koordinaatistoihin $\{e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0)\}$ ja $\{\tilde{e}_1(t_0), \tilde{e}_2(t_0), \tilde{e}_3(t_0)\}$ voidaan olettaa:

(2.8) $c(t_0) = \tilde{c}(t_0), \quad e_i(t_0) = \tilde{e}_i(t_0) \quad i = 1, 2, 3.$

Tarkastellaan lauseketta:

$$A(t) = (\tilde{e}_1 \cdot e_1 + \tilde{e}_2 \cdot e_2 + \tilde{e}_3 \cdot e_3)(t)$$

(2.8.) $\Rightarrow A(t_0) = 3$. Lisäksi pätee $\tilde{e}_i \cdot e_i \le 1$ ja $(\tilde{e}_i \cdot e_i = 1 \Leftrightarrow \tilde{e}_i = e_i)\ \forall i = 1,2,3.$

$\Rightarrow A(t) \le 3$ ja $(A(t) = 3 \Leftrightarrow \tilde{e}_i = e_i\ \forall i = 1,2,3)$.

Jos voidaan os. $A(t) \equiv 3$, niin erityisesti

$\tilde{c}'(t) = \tilde{e}_1(t) = e_1(t) = c'(t)\ \forall t$ eli $\tilde{c}' - c' \equiv 0$

ja $\tilde{c} - c \equiv \text{vakio} \underset{(2.8)}{=} 0$.

Ensimmäinen väite siis seuraa jos $A \equiv 3$:

$$A' = \tilde{e}_1{}' \cdot e_1 + \tilde{e}_1 \cdot e_1{}' + \tilde{e}_2{}' \cdot e_2 + \tilde{e}_2 \cdot e_2{}' + \tilde{e}_3{}' \cdot e_3 + \tilde{e}_3 \cdot e_3{}'$$

$$F3: \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \kappa \tilde{e}_2 \cdot e_1 + \tilde{e}_1 \cdot \kappa e_2 + (-\kappa \tilde{e}_1 + \tau \tilde{e}_3) \cdot e_2 +$$
$$\tilde{e}_2 \cdot (-\kappa e_1 + \tau e_3) - \tau \tilde{e}_2 \cdot e_3 - \tilde{e}_3 \cdot \tau e_2 = 0$$

$\Rightarrow$ $A \equiv$ vakio $= A(t_0) = 3$.

Toinen väite: Jos κ, τ annettu $\Rightarrow$ yhtälöllä

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \qquad (F3)$$

1-kös sileä ratkaisu alkuarvolla $e_1(t_0) = (1,0,0)$, $e_2(t_0) = (0,1,0)$, $e_3(t_0) = (0,0,1)$. Matriisi $A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$ vinosymmetrinen $\overset{(HT)}{\Rightarrow}$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ $\mathbb{R}^3$:n ortonormaalit koordinaatit $\forall t$.

Määritellään $c(t) = \int_{t_0}^{t} e_1(s)\,ds$. Tällöin $c'(t) = e_1(t)$ joten $\|c'(t)\| = 1$. Lisäksi pätee $c''(t) = e_1'(t) \overset{(F3)}{=} \kappa e_2$ joten $\kappa = \|c''(t)\|$ on c:n kaarevuus.

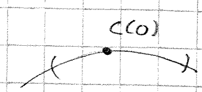
$e_3 \perp sp\{e_1, e_2\}$, $\|e_3\| = 1$ $\Rightarrow$ $e_3 = \lambda\, e_1 \times e_2$, $\lambda = \pm 1$

λ sileä, $e_3(t_0) = e_1(t_0) \times e_2(t_0)$ $\Rightarrow$ $\lambda(t) \equiv$ vakio $= \lambda(t_0) = 1$.

$e_2' \cdot e_3 \overset{(F3)}{=} -e_3' \cdot e_2 = +\tau\, e_2 \cdot e_2 = +\tau$ on c:n torsio. □

Tutkitaan $\mathbb{R}^3$:n Frenét-käyrää approksimoivan Taylor-kehitelmän esitystä Frenét kehyksessä:

c:n Taylor pisteen $c(0)$ ympäristössä:



$$c(t) = c(0) + c'(0)t + c''(0)\frac{t^2}{2} + c'''(0)\frac{t^3}{3!} + O(t^4).$$

Esitetään kerroinfunktiot $t \mapsto \alpha(t)$, $t \mapsto \beta(t)$, $t \mapsto \gamma(t)$ s.e.

$$c(t) = c(0) + \alpha(t) e_1(0) + \beta(t) e_2(0) + \gamma(t) e_3(0) + O(t^4)$$

$$(F3) \Rightarrow \begin{cases} c' = e_1 \\ c'' = e_1' = \kappa e_2 \\ c''' = \kappa' e_2 + \kappa e_2' = \kappa' e_2 + \kappa(-\kappa e_1 + \tau e_3) \\ \qquad = -\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa\tau e_3. \end{cases}$$

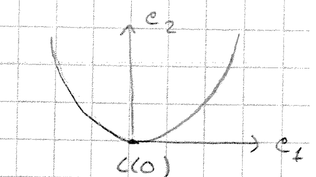
$$\Rightarrow \quad c(t) = c(0) + e_1 t + \kappa e_2 \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}(-\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa\tau e_3) + O(t^4)$$

$$(*) \qquad = c(0) + \underbrace{\left(t - \frac{\kappa^2}{6} t^3\right)}_{=:\alpha(t)} e_1 + \underbrace{\left(\frac{\kappa t^2}{2} + \frac{\kappa' t^3}{6}\right)}_{=:\beta(t)} e_2 + \underbrace{\frac{\kappa\tau\, t^3}{6}}_{=:\gamma(t)} e_3 + O(t^4)$$

Tämän avulla projektiokäyrät (e_i, e_j)-tasoihin

(e_1, e_2)-tasossa (kaskehustaso):

$$c(t) = c(0) + t e_1 + \frac{\kappa}{2} t^2 e_2 + O(t^3)$$

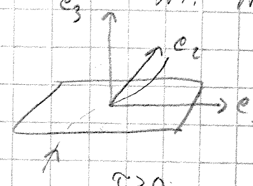


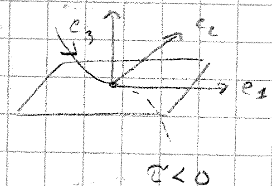
i. toisen kertaluvun approksimaatio on paraabeli

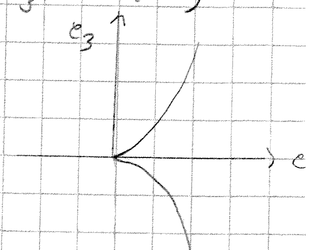
(e_2, e_3)-taso (normaalitaso)

$$c(t) = c(0) + \left(\frac{\kappa}{2} t^2 + \frac{\kappa'}{6} t^3\right) e_2 + \frac{\kappa\tau}{6} t^3 e_3 + O(t^4)$$

Vrt. Neilin paraabeli kun $\tau \neq 0$

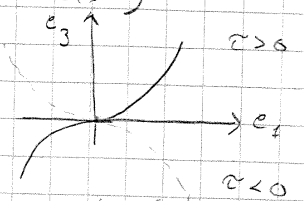






(e_1, e_3)-taso (suoristava taso)

$$c(t) = c(0) + \left(t - \frac{\varkappa^2}{6} t^3\right)e_1 + \frac{\varkappa\tau}{6} t^3 e_3 + O(t^4)$$



Esitys $(*)$ on Frenét käyrän

lokaali kanoninen muoto pisteen $c(0)$ ympäristössä.

Eräs tämän seuraus: $\exists$ parametrin $t=0$ ympäristö

$I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ s.e. $c(I) \subset$ suoristavan tason rajaaman positiivisen

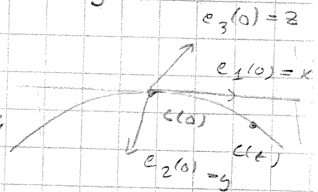
e_2-akselin suuntainen puoliavaruus: $\varkappa > 0 \Rightarrow$

riittävän pienillä t $\beta(t) = \varkappa \frac{t^2}{2} + \varkappa' \frac{t^3}{6} \geq 0$ ja $(= 0 \Leftrightarrow t = 0)$

Toinen seuraus: koskeutustaso saadaan rajana

tasoista, jotka sisältävät suoran $sp\{e_1(0)\}$ ja

pisteen $c(t)$ kun $t \to 0$:



tasot, jotka sisältävät suoran $sp\{e_1(0)\}$

ovat muotoa $z(t) = k\, y(t)$ tai $y(t) = 0$.

$y(t) = 0$ on suoristava taso $(e_1(0), e_3(0))$ joka ei

sisällä $|c|$:n pisteitä pienillä $t \neq 0$. Taso kulkee

pisteen $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ kautta ($(e_1(0), e_2(0), e_3(0))$-koordin.)

$$k = \frac{z(t)}{y(t)} = \frac{\gamma(t) + O_1(t^4)}{\beta(t) + O_2(t^4)} = \frac{\frac{\varkappa\tau t^3}{6} + O_1(t^4)}{\varkappa\frac{t^2}{2} + \varkappa'\frac{t^3}{6} + O_2(t^4)} \to 0 \text{ kun}$$

$t \to 0$ eli rajalla saadaan koskeutustaso (e_1, e_2).

2.2.7 yleistys korkeampiin dimensioihin:

Määritelmä Säännöllinen polku $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ on

Frenét käyrä jos $\|c'(t)\| \equiv 1$ ja $\forall\, t \in [a,b]$

vektorit $c'(t), c''(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)$ ovat lineaarisesti

riippumattomat. Pisteeseen $c(t)$ liittyvä Frenét

n-kehys $\{e_1, \ldots, e_n\}$ määräytyy 1-käsitteisesti

ehdoista (i) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormaali ja positiivisesti suunnistettu

(ii) $\forall\, k = 1, \ldots, n-1$ $sp\{e_1, \ldots, e_k\} = sp\{c'(t), \ldots, c^{(k)}(t)\}$

(iii) $c^{(k)}(t) \cdot e_k(t) > 0$ $\forall\, k = 1, \ldots, n-1$

Huom 1° vektorit $e_1, \ldots, e_{n-1}$ määräytyvät derivaatoista

$c'(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)$ Gram-Schmidt ortonormeerauksen avulla:

$e_1 := c'(t)$

$e_2 := c''(t) / \|c''(t)\|$

$e_3 := \left(c'''(t) - (c'''(t) \cdot e_1)e_1 - (c'''(t) \cdot e_2)e_2\right) / \|(\cdot)\|$

$\ldots$

$$e_j := \left(c^{(j)}(t) - \sum_{i=1}^{j-1} (c^{(j)}(t) \cdot e_i)e_i\right) / \|(\cdot)\|,$$

$j = 2, \ldots, n-1$

e_n määräytyy 1-käsitteisesti ehdosta (i)

2° $n = 2$: sään., $\|c'\| = 1$ $\Rightarrow$ Frenét
$n = 3$: sään., $\|c'\| = 1$, $c'' \neq 0$ $\Rightarrow$ Frenét

3° Frenét kehys $t \mapsto (e_1(t), \ldots, e_n(t))_{c(t)}$ on pitkin polkua c liikkuva kehys, joka kussakin polun pisteessä antaa uudet $\mathbb{R}^n$:n (käyrän geometriaa heijastavat) koordinaatit.

Voidaan todistaa (kts. k.2005 luennot)

2.8. Lause Olkoon c $\mathbb{R}^n$:n Frenét-käyrä ja $e_1,\dots,e_n$ siihen liittyvä Frenét-kehys. Tällöin löytyy sileät funktiot $\varkappa_1,\dots,\varkappa_{n-1}$ s.e. $\varkappa_1,\dots,\varkappa_{n-2}>0$.

Funktio $t\mapsto\varkappa_i(t)$ $i=1,\dots,n-1$ on käyrän c Frenét-kaarevuus. Yhtälöryhmä

$$(Fn)\qquad \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\varkappa_2 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \varkappa_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\varkappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

on käyrään c liittyvät Frenét-yhtälöt ja

$\varkappa_i = e_i'\cdot e_{i+1}$.

2.9. Käyrien lokaalin teorian peruslause

Ol. annettu sileät funktiot $t\mapsto\varkappa_i(t)$, $(a,b)\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n-1$ s.e. $\varkappa_1,\dots,\varkappa_{n-2}>0$.

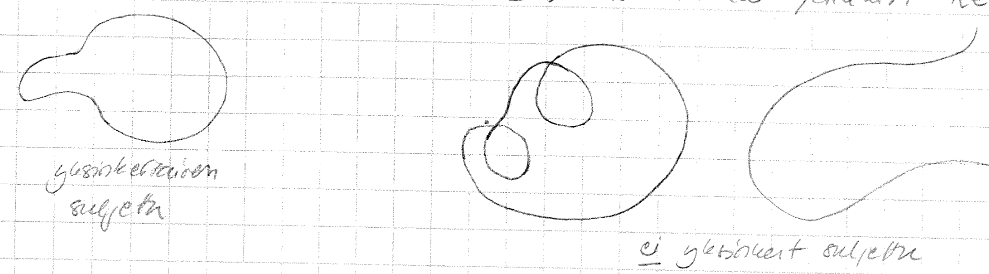
Ol. lisäksi kiinteällä parametrilla $t_0\in(a,b)$ annettu piste $q_0\in\mathbb{R}^n$ ja kehys $(e_1(t_0),\dots,e_n(t_0))$.

Tällöin löytyy 1-käsitteinen Frenét-käyrä s.e.

(i) $c(t_0)=q_0$
(ii) $(e_1(t_0),\dots,e_n(t_0))$ on c:n Frenét kehys pisteessä q_0
(iii) $\varkappa_1,\dots,\varkappa_{n-1}$ c:n Frenét kaarevuudet.

3. Tasokäyrien globaalia teoriaa

Määritelmä Ol. $a>0$. a-jaksoinen yksinkertainen suljettu polku $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ on säännöllinen polku c s.e. $c(t)=c(t') \iff t'-t=ka$ jollakin $k\in\mathbb{Z}$.

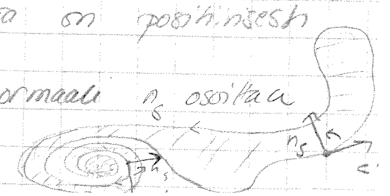


Ol. tunnetuksi Jordanin käyrälause: Yksinkertainen suljettu tasopolku γ jakaa $\mathbb{R}^2$:n kolmeen pistevieraaseen osaan
(i) $|\gamma|$ polun jäljen pisteet
(ii) int γ rajoitettu alue, jonka reuna on $|\gamma|$
(iii) ext γ rajoittamaton alue, — " —

Huom (1) alue = avoin ja yhtenäinen
(2) avoimella joukolla D yhtenäisyys = polkuyhtenäisyys: $\forall\, x,y\in D$ $\exists$ polku $c:[a,b]\to D$ s.e. $c(a)=x$, $c(b)=y$.
(3) Jordanin käyrälauseen tarkka todistus:
Munkres: Topology
Wall: Geometric introduction to topology

Sopimus: yksinkertainen suljettu käyrä = yksinkertainen suljettu polku, joka parametrisoitu kaarenpituuden suhteen ja sen pituus = jakson pituus.

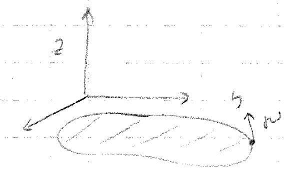
Sanotaan: yksinkertainen suljettu käyrä on positiivisesti suunnistettu, jos sen suunnistettu normaali n_s osoittaa int(γ):n $\forall\, t$.



Muistutus (L2): alueen int(γ) pinta-ala: (3.2.)

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \iint_{\mathrm{int}\,\gamma} dx\,dy$$

Greenin kaava (L2): $\displaystyle\iint_{\mathrm{int}(\gamma)} (\nabla\times\bar F)\cdot\bar k\,dx\,dy = \int_\gamma \bar F\cdot d\bar r$, missä



$\bar k$ z:n suuntainen yksikkövektori

$d\bar r = \gamma'(t)\,dt$, $\quad \bar F = (f_1, f_2)$

$$\nabla\times\bar F = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\bar k$$

$$\Rightarrow \int_{\mathrm{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma (f_1, f_2)\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f_1\,dx + f_2\,dy,$$

missä $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\quad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))\,dt = (dx, dy)$

Valitsemalla $\bar F = (f_1, f_2)$ s.e. $\nabla\times\bar F \equiv \bar k$ saadaan

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \int_\gamma \bar F\cdot d\bar r$$

a) valinta $\bar F = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$ $\quad \left(\nabla\times\bar F = \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\bar k = \bar k\right)$

antaa $A(\mathrm{int}\,\gamma) = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y)\,dx + x\,dy$

(3.1) $$= \frac{1}{2}\int_0^L (xy' - yx')\,dt$$

kun $\gamma: [0, L] \to \mathbb{R}^2$.

b) voidaan valita yleisemmin $\bar F = (-cy, (1-c)x)$ $c\in\mathbb{R}$

jolloin $\nabla\times\bar F = ((1-c) - (-c))\bar k = \bar k$ ja

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \int_\gamma (-cy)\,dx + (1-c)x\,dy = \int_0^L (-cyx' + (1-c)xy')\,dt$$

jolloin $c = 0 \Rightarrow A(\mathrm{int}\,\gamma) = \int_0^L xy'\,dt$

$c = 1 \Rightarrow A(\mathrm{int}\,\gamma) = -\int_0^L yx'\,dt$

jne.

3.2 Lause Ol. γ yksinkertainen suljettu käyrä, $\ell(\gamma)$ sen pituus ja $A(\mathrm{int}\,\gamma)$ sen rajoittaman alueen pinta-ala. Tällöin pätee isoperimetrinen epäyhtälö: (3.3.)

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) \le \frac{1}{4\pi}\ell(\gamma)^2, \quad \text{missä}$$

"=" $\Leftrightarrow$ γ on ympyrä

Tod: Selvästi, jos γ R-säteinen ympyrä, niin $\ell(\gamma) = 2\pi R$ ja $A(\mathrm{int}\,\gamma) = \pi R^2$ $\Rightarrow$

$$A(\mathrm{int}\,\gamma) = \pi R^2 = \frac{1}{4\pi}(2\pi R)^2 = \frac{1}{4\pi}\ell(\gamma)^2.$$

Väitteen epätriviaali osa saadaan Wirtingerin epäyhtälöstä.

3.3. Lause Ol. $F: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sileä, s.e. $F(0) = F(\pi) = 0$.

Tällöin pätee: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 dt \ge \int_0^\pi F(t)^2\,dt$ ja

"=" $\Leftrightarrow$ $F(t) = A\sin t$ $\quad \forall\, t\in[0,\pi]$, A vakio

Tod: Ol. $G(t) = \dfrac{F(t)}{\sin t}$ $\qquad F'(t) = G'(t)\sin t + G(t)\cos t$

$$\Rightarrow \int_0^\pi (F'(t))^2\,dt = \int_0^\pi (G'(t)\sin t + G(t)\cos t)^2\,dt$$

$$= \int_0^\pi (G'(t))^2\sin^2 t\,dt + 2\int_0^\pi G'(t)G(t)\sin t\cos t\,dt + \int_0^\pi (G(t))^2\cos^2 t\,dt.$$

$$2\int_0^\pi G'G\sin t\cos t\,dt = \Big/_0^\pi G^2\sin t\cos t - \int_0^\pi G^2(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi G^2(\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt$$

Saadaan:

$$\int_0^\pi (F'(t))^2\,dt = \int_0^\pi (G'^2 + G^2)\sin^2 t\,dt\,dt = \int_0^\pi F^2(t)\,dt + \underbrace{\int_0^\pi (G'(t))^2\sin^2 t\,d}_{\ge 0}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi (F'(t))^2\,dt \ge \int_0^\pi F(t)^2\,dt$$

"=" $\Leftrightarrow$ $G'(t) \equiv 0$ $\Leftrightarrow$ $G \equiv$ vakio $\Leftrightarrow$ $F =$ vakio $\sin t$ $\square$

Tod (3.2): OL. γ parametrisoitu parametrilla $t = \frac{\pi s}{\ell(\gamma)} = \psi(s)$ (3.4.)

missä s parametri kaarenpituuden suhteen l. $t \in [0,\pi]$

ja $\gamma(0) = 0$ (translaatiolla $x \mapsto x - \gamma(0)$)

Esitetään $\ell(\gamma)$, $A(\mathrm{int}\,\gamma)$ napakoordinaateissa: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = r'\cos\theta - r(\sin\theta)\theta' \\ y' = r'\sin\theta + r(\cos\theta)\theta' \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = (r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta)^2 = (r')^2\cos^2\theta + r^2\theta'^2\sin^2\theta$$
$$- 2rr'\theta'\cos\theta\sin\theta + (r')^2\sin^2\theta + r^2\theta'^2\cos^2\theta + 2r'r\theta'\sin\theta\cos\theta = r'^2 + r^2\theta'^2.$$

Toisaalta: $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{x'(s)^2 + y'(s)^2}{(\psi')^2} = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2}$, sillä

$t = \psi(s)$: $\begin{cases} X(s) = x(\psi(s)) \\ Y(s) = y(\psi(s)) \end{cases}$ $\begin{cases} X'(s) = x'(t)\psi'(s) \\ Y'(s) = y'(t)\psi'(s) \end{cases}$, $\psi'(s) = \frac{\pi}{\ell(\gamma)}$

ja $x'(s)^2 + y'(s)^2 = \|\gamma'(s)\|^2 = 1$

Saatiin: $r'^2 + r^2\theta'^2 = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2} \Rightarrow \int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2)\,dt = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2}\int_0^\pi dt = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi}$

Toisaalta: $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = r\cos\theta(r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta) -$
$r\sin\theta(r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta) = r^2\theta'\cos^2\theta + r^2\theta'\sin^2\theta = r^2\theta'$.

$$\overset{(3.1.)}{\Rightarrow} A(\mathrm{int}\,\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (xy' - yx')\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\theta'\,dt. \quad (**)$$

Pitää os: $0 \le \frac{\ell(\gamma)^2}{4\pi} - A(\mathrm{int}\,\gamma) \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \frac{1}{4}\int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\theta'\,dt$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2 - 2r^2\theta')\,dt$$

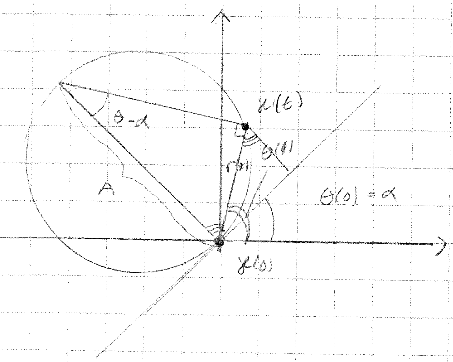
$$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\int_0^\pi r^2(\theta' - 1)^2\,dt}_{\ge 0} + \underbrace{\int_0^\pi (r'^2 - r^2)\,dt}_{\ge 0}\Big)$$

≥ 0 (L. 3.2.1 $F = r$, $0 = \gamma(0) = \gamma(\pi) \Rightarrow r(0) = r(\pi) = 0$)

$\Rightarrow$ "$\le$"

Toisaalta "$=$" $\Leftrightarrow$ $\theta' \equiv 1$ ja $r(t) = A\sin t$ (3.2)

$\Rightarrow \theta(t) = t + \alpha$, $r(\theta) = A\sin(\theta - \alpha)$

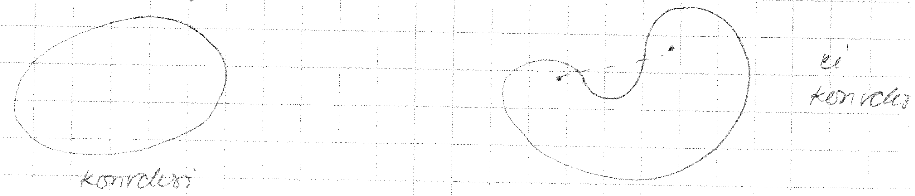


Saatiin "$=$" $\Rightarrow$ (3.5)

γ on $\frac{A}{2}$-säteinen ympyrä.

□.

Määritelmä: yksinkertainen suljettu käyrä on konveksi jos $\mathrm{int}\,\gamma$ on konveksi l. $\forall\, x,y \in \mathrm{int}(\gamma)$ yhdistettävissä janapolulla $\mathrm{int}\,\gamma$:issa



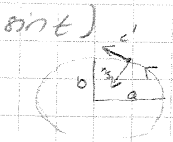
Määritelmä: polun c kärkipiste on piste $c(t)$, joka on suunnistetun kaarevuuden kriittinen piste l. $\kappa_s'(t) = 0$

Voidaan os. määritelmä riippumaton parametrisoinnista (HT)

Esim. Ellipsi $c: c(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$c'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$, $c''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$

$$c' \times c'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & b\cos t & 0 \\ -a\cos t & -b\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ab)$$



$$\Rightarrow \kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{ab}{(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{3/2}} = \kappa_s \text{ (param. posit. kiertosuuntaan)}$$

$$\kappa_s'(t) = -\frac{3}{2}ab\,(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{-5/2}(-2a^2\cos t\sin t + 2b^2\sin t\cos t)$$

$$= \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin t\cos t}{(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{5/2}}$$

Saatiin: Jos c (aito) ellipsi $(a \neq b)$, niin sillä on neljä kärkipistettä $c(0)=(a,0)$, $c(\frac{\pi}{2})=(0,b)$, $c(\pi)=(-a,0)$, $c(\frac{3\pi}{2})=(0,-b)$.

Jos c on ympyrä $(a=b)$, niin jokainen piste on kärkipiste.

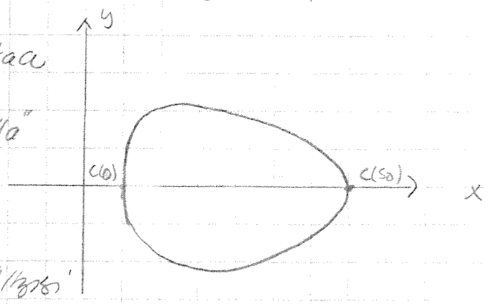
3.5. Neljän kärkipisteen lause

Jokaisella konveksilla yksinkertaisella tasokäyrällä on vähintään neljä kärkipistettä.

Tod: Jos $\kappa_s \equiv$ vakio niin $\kappa_s' \equiv 0$ ja jokainen piste on kärkipiste. Ol. κ_s ei-vakio. Stationaarisessa pisteessä $\kappa_s'=0$ ja κ_s' vaihtaa merkkiä (konveksius). Voi olla $\kappa_s'|_{[t,t+\varepsilon]} \equiv 0$

Jatkuvana funktiona $t \mapsto \kappa_s(t)$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä $[a,b]$. Tällöin myös $\kappa'=0$.
(c suljettu)
Voidaan olettaa $[a,b]=[0,L]$ param. kaarenpituuden suhteen ja $\kappa(0)$ minimi, $\kappa(s_0)$ maksimi. $(c(0)=c(L))$

Val (x,y)-koordinaatit s.e. x-akseli sisältää pisteet $c(0)$ ja $c(s_0)$. Tällöin $c(s)=(x(s),y(s))$ ja $y(0)=y(s_0)=0$. Käyrä ei leikkaa x-akselia missään pisteessä välillä $[0,s_0]$, sillä konveksius $\Rightarrow$ Jana $[c(0),c(s_0)] \subset |c|$ sisältyisi



x-akseliin ja $\kappa_s|_{[0,s_0]} \equiv 0 \Rightarrow \kappa_s \equiv 0$ koska $\kappa(0)$ oli pienin ja $\kappa(s_0)$ suurin arvo. $\Rightarrow y$ vaihtaa merkkiä täsmälleen pisteissä 0 ja s_0.

VO: pisteet $c(0)$ ja $c(s_0)$ ovat ainoat kärkipisteet.

Tällöin κ_s' vaihtaa merkkiä vain pisteissä $s=0$ ja $s=s_0$.

$\Rightarrow$ funktio $s \mapsto \kappa_s'(s)y(s)$ ei vaihda lainkaan merkkiä. Ol. param. posit. kiertosuuntaan, $(-y',x')$ (x',y')
jolloin $\kappa=\kappa_s$ (konveksius)
Frenet $\Rightarrow$ $e_1=(x',y')$, $e_2=n_s=(-y',x')$

$$(x'',y'')=e_1'=\kappa_s e_2=\kappa_s(-y',x')$$

$$\Rightarrow x''=-\kappa_s y'$$

$$\Rightarrow \int_0^L \kappa_s'(s)y(s)\,ds = \Big/_0^L \kappa_s(s)y(s) - \int_0^L \kappa_s(s)y'(s)\,ds$$

$$\overset{y(L)=y(0)=0}{=} \int_0^L x''(s)\,ds = x'(L)-x'(0)=0, \text{ sillä}$$

polku oli suljettu. ↯ sillä integroitava $s \mapsto \kappa_s'(s)y(s)$ ei vaihda merkkiä, joten $\kappa_s'y \equiv 0 \Rightarrow \kappa_s \equiv$ vakio ↯.

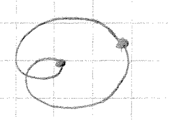
Siis löytyy kolmas piste, missä κ_s' vaihtaa merkkiä.

$t \mapsto \kappa_s'(t)$ jaksollinen, joten pisteitä oltava parillinen määrä $\Rightarrow$ vähintään 4 pistettä. □

Huom. 1) Lauseen väite pätee myös ilman oletusta 'konveksi'.

2) Lause ei päde ilman oletusta 'yksinkertainen'

2 kp $\Rightarrow$



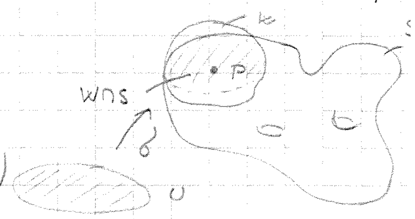
II Pinnat 1. $\mathbb{R}^3$:n pinnat

Määritelmä $S \subset \mathbb{R}^3$ on (topologinen) pinta, jos

$\forall p \in S \ \exists$ avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ ja avoin joukko

$W \subset \mathbb{R}^3$, $p \in W$ s.e. $\exists$ homeomorfismi $\sigma : U \to W \cap S$.

idea: σ parametrisoi pinnan pisteen p ympäristön



Muistutus: $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin (merk. $U \subset_o \mathbb{R}^n$)
$\Leftrightarrow \forall u \in U \ \exists r > 0$ s.e.
$B(u,r) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|u - v\| < r \} \subset U$

Jos $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, niin kuvaus $f : X \to Y$ on homeomorfismi jos f on bijektio ja f, f^{-1} jatkuvia

Sanotaan: kokoelma $\mathcal{A} = \{ (\sigma, U) \}$ s.e. $S \subset \bigcup_{(\sigma,U) \in \mathcal{A}} \sigma(U)$

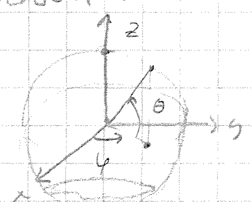
on pinnan S kartasto.

Huom. usein sanotaan σ on parametrisointi ja σ^{-1} on karttakuvaus

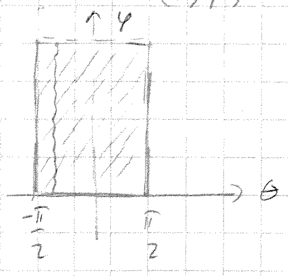
Esim 1° $S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ yksikköpallo

luonnollinen parametrisointi pallokoordinaateissa:

$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta)$



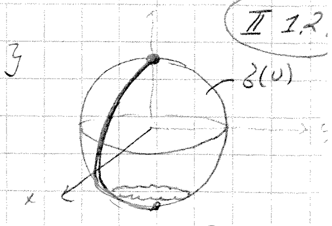
Tarvitaan $(\theta, \varphi) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi) =: U$



$\sigma(U)$ peittää S^2:n, mutta ei ole injektio eikä U ole avoin.

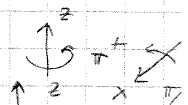
Valinta $U := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ suurin mahdollinen, mutta $\sigma(U)$ ei peitä S^2:ta.

Tällöin $\sigma : U \to W \cap S^2$, missä
$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0 \text{ tai } x < 0 \}$
on $\mathbb{R}^3$:n avoin joukko



$\sigma : U \to W \cap S^2$ homeomorfismi ?

Olk. $\tilde{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ toinen parametrisointi, joka

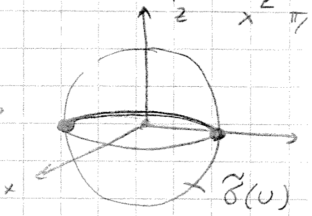


saadaan kiertämällä joukkoa $\sigma(U)$

kulman π (posit) z-akselin suhteen

ja " $\pi/2$ (posit) x- " "

eli $x \mapsto -x \mapsto -x$
$y \mapsto -y \mapsto -z$
$z \mapsto z \mapsto -y$



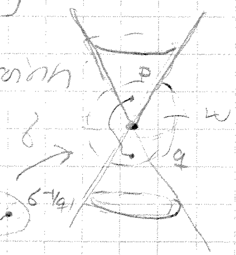
$\Rightarrow \tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin\varphi)$

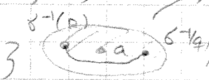
Päte $S^2 \subset \sigma(U) \cup \tilde{\sigma}(U)$.

Esim 2° kartio $K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \}$

ei ole pinta! Ol. $\sigma : U \to K \cap W$ parametrisointi

s.e. $\sigma(a) = 0$. Voi ol. $U = B^2(a, \varepsilon)$





Merk. $K = K_+ \cup K_-$ $K_+ = \{ (x,y,z) \in K \mid z > 0 \}$
$K_- = \{ (x,y,z) \in K \mid z < 0 \}$

$W \subset_o \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists \ p \in K_+ \cap W$ ja $q \in K_- \cap W$

$\exists$ Pisteet $\sigma^{-1}(p)$, $\sigma^{-1}(q)$ yhdistävä polku c U:ssa s.e. $c(t) \neq a \ \forall t$.

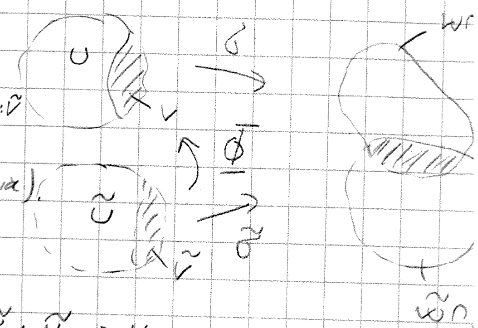
$\Rightarrow \sigma(c) \cap \{0\} = \emptyset$ ↯.

Kuitenkin: $K_+ \cup \{0\}$, $K_- \cup \{0\}$, $K_+ \cup K_-$ (topologisia) pintoja $\sigma_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $(u,v) \mapsto (u, v, \pm\sqrt{u^2+v^2})$
$\tilde{\sigma}_\pm = \sigma_\pm |_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$.

Määritelmä

Ol. $\sigma : U \to S \cap W$, $\tilde\sigma : \tilde U \to S \cap \tilde W$ pinnan S parametrisointeja.

$\sigma, \tilde\sigma$ homeomorfismeja $\Rightarrow$



$V := \sigma^{-1}(S \cap W \cap \tilde W)$, $\tilde\sigma^{-1}(S \cap W \cap \tilde W) =: \tilde V$

avoimia $\mathbb{R}^3$:ssa ($U, \tilde U$ avoimia).

Jos $S \cap W \cap \tilde W \neq \emptyset$ saadaan

homeomorfismi $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde\sigma : \tilde V \to V$

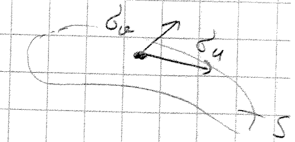
parametrisointien σ ja $\tilde\sigma$ välinen transitiokuvaus.

Pätee: $\tilde\sigma(\tilde u, \tilde v) = \sigma(\Phi(\tilde u, \tilde v)) \quad \forall (\tilde u, \tilde v) \in \tilde V$

Määritelmä Parametrisointi $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ on säännöllinen

jos se on sileä ($= \exists$ kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat) ja vektorit $\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial v}\right) \in \mathbb{R}^3$ ovat lineaarisesti

riippumattomia (merk. osittaisderivaattoja u:n ja v:n suhteen lyhyesti σ_u, σ_v)



i.e. $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \quad \forall (u,v) \in U$.

Määritelmä Sileä pinta on pinta S, jolla on kartasto, joka koostuu säännöllisistä parametrisoinneista.

Esim 1° $\sigma, \tilde\sigma$ S^2:n parametrisointi kuten edellä

$\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$

$\tilde\sigma(\theta,\varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin\varphi)$

selvästi sileitä.

$\sigma_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\sigma_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$

$\Rightarrow \sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2\theta\cos\varphi, \cos^2\theta\sin\varphi, \underbrace{-\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi - \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}_{= -\sin\theta\cos\theta})$

$\Rightarrow \|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\|^2 = \cos^4\theta\cos^2\varphi + \cos^4\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\theta$

$= \cos^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta = \cos^2\theta$

$\Rightarrow \|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos\theta| \neq 0 \quad \forall \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ joten σ sään.

samoin $\tilde\sigma$ sään.

2° $K_+ \cup \{0\}$, $K_- \cup \{0\}$ ovat sileitä pintoja.

$K_+ \cup K_-$ on sileä pinta.

Huom. yleisemmin: jos pinta parametrisoitanssa sileänä graafina σ $(u,v) \mapsto (u,v,h(u,v))$, missä $h : U \to \mathbb{R}$ sileä, niin se on sileä:

$\sigma_u = (1, 0, h_u)$, $\sigma_v = (0, 1, h_v)$

$\Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v = (-h_u, -h_v, 1) \neq 0 \quad \forall h$!.

Voidaan osoittaa: Sileän pinnan transitiokuvaukset ovat sileitä (käänteiskuvauslause!)

Käänteinen pätee

1.1. Lause Ol. $U, \tilde U \subset_o \mathbb{R}^2$ ja $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ säännöllinen parametrisointi. Jos $\Phi : \tilde U \to U$ on sileä diffeomorfismi ($=$ sileä homeomorfismi s.e. Φ^{-1} sileä) niin $\tilde\sigma = \sigma \circ \Phi : \tilde U \to \mathbb{R}^3$ on säännöllinen parametrisointi.

Tod: $\tilde\sigma$:n sileys selvä sileiden funktioiden yhdisteenä.

$\tilde\sigma_u \times \tilde\sigma_v \neq 0$?

Olk. $(\tilde u,\tilde v)\in\tilde U$ ja $(u,v)=\Phi(\tilde u,\tilde v)\in U$

ketjusääntö funktioon $\tilde\sigma=\sigma\circ\Phi:\tilde U\to\mathbb{R}^3$

$$\tilde\sigma_{\tilde u}=\sigma_u\frac{\partial u}{\partial\tilde u}+\sigma_v\frac{\partial v}{\partial\tilde u},\qquad \tilde\sigma_{\tilde v}=\sigma_u\frac{\partial u}{\partial\tilde v}+\sigma_v\frac{\partial v}{\partial\tilde v}$$

$$\Rightarrow\ \tilde\sigma_{\tilde u}\times\tilde\sigma_{\tilde v}=\sigma_u\times\sigma_v\,\frac{\partial u}{\partial\tilde u}\frac{\partial v}{\partial\tilde v}+\sigma_v\times\sigma_u\,\frac{\partial v}{\partial\tilde u}\frac{\partial u}{\partial\tilde v}$$

$$=\sigma_u\times\sigma_v\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\tilde u} & \frac{\partial u}{\partial\tilde v}\\ \frac{\partial v}{\partial\tilde u} & \frac{\partial v}{\partial\tilde v}\end{vmatrix}=J_\Phi\,\sigma_u\times\sigma_v$$

J_Φ on Φ:n Jacobin determinantti.

Φ kääntyvä $\Rightarrow J_\Phi\neq0$ $\big(\Phi\circ\Phi^{-1}(x)=x=\Phi^{-1}\circ\Phi(x)\ \forall$

$\Rightarrow D\Phi\circ D\Phi^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow D\Phi^{-1}=(D\Phi)^{-1}$

$\Rightarrow J_\Phi=\det D\Phi\neq0\big)$ $\Rightarrow$ $\tilde\sigma$ sään. □.

Sileiden transitiokuvausten välityksellä pintojen välisten kuvausten sileys:

__Määritelmä__ Ol. S_1,S_2 sileitä pintoja. Kuvaus $f:S_1\to S_2$ on __sileä pisteessä__ $x\in S_1$, jos

$\sigma_1:U_1\to\mathbb{R}^3$ sileä parametrisointi pisteen x ympäristössä,

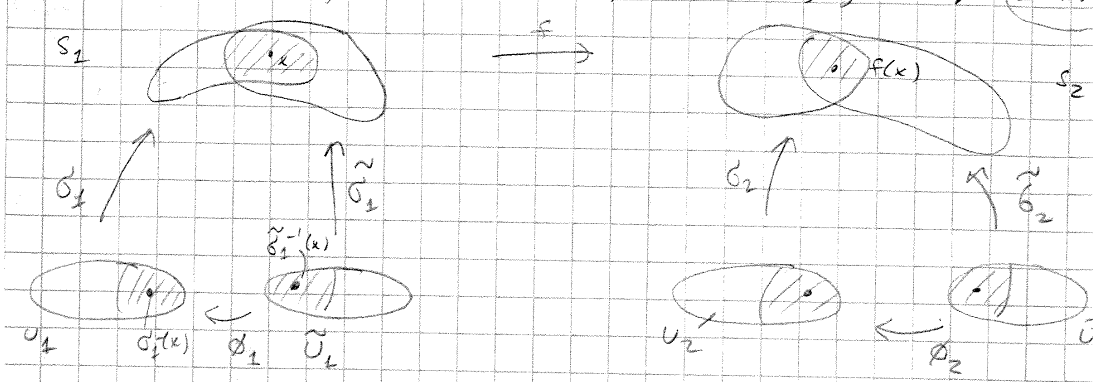
$\sigma_2:U_2\to\mathbb{R}^3$ " " " $f(x)$ –"–

ja kuvaus $\sigma_2^{-1}\circ f\circ\sigma_1:U\to U_2$ (f:n lokaali esitys) on sileä pisteessä $\sigma_1^{-1}(x)\in U\subset U_1$ jollakin U.

Yo. määritelmä riippumaton sileiden transitiokuvausten välittämien karttojen valinnasta: Ol. $\tilde\sigma_1:\tilde U_1\to\mathbb{R}^3$ toinen sileä parametrisointi pisteen $x\in S_1$ ympäristössä ja $\tilde\sigma_2:\tilde U_2\to\mathbb{R}^3$

II 1.

toinen sileä parametrisointi pisteen $f(x)$ ympäristössä:



Tällöin myös $\tilde\sigma_2^{-1}\circ f\circ\tilde\sigma_1:\tilde U_1\to\tilde U_2$ on sileä:

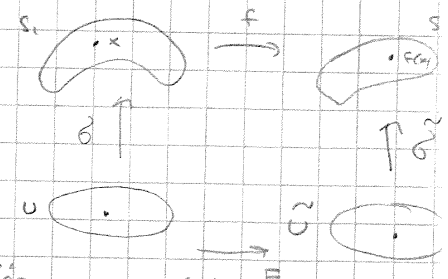
Ol. tunnetuksi transitiokuvausten Φ_1,Φ_2 sileys $\Rightarrow$

$\tilde\sigma_2^{-1}\circ f\circ\tilde\sigma_1=\Phi_2^{-1}\circ\sigma_2^{-1}\circ f\circ\sigma_1\circ\Phi_1$ sileä määrittelyjoukossaan.

HT: $f:S_1\to S_2$, $g:S_2\to S_3$ sileitä $\Rightarrow$ $g\circ f:S_1\to S_3$ sileä

1.2 __Lause__ Olkoon $f:S_1\to S_2$ diffeomorfismi sileiden pintojen S_1,S_2 välillä ja $\sigma:U\to\mathbb{R}^3$ sään. parametrisointi. Tällöin $f\circ\sigma:U\to\mathbb{R}^3$ on sään. parametrisointi.

__Tod:__ Olk. $x\in\sigma(U)$ ja $\tilde\sigma:\tilde U\to\mathbb{R}^3$ S_2:n parametrisointi s.e. $f(x)\in\tilde\sigma(\tilde U)$. Tällöin



$F:=\tilde\sigma^{-1}\circ f\circ\sigma:U\to\tilde U$ sileä homeomorfismi ja

$F^{-1}=\sigma^{-1}\circ f^{-1}\circ\tilde\sigma$ sileä

4.1.1 $\Rightarrow$ $f\circ\sigma=\tilde\sigma\circ F$ sään. parametrisointi □.

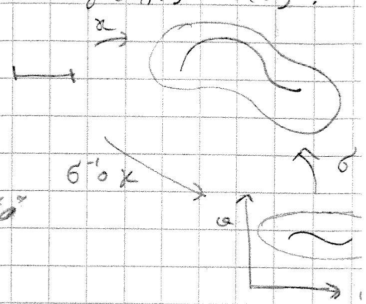
Ol. S sileä pinta ja $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ sään parametrisointi.

Ol. $\gamma: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$ sileä polku s.e. $\gamma(\alpha,\beta) \subset \sigma(U)$.

Tällöin

$t \mapsto (\sigma^{-1} \circ \gamma)(t) = (u(t), v(t))$

on sileä tasopolku (HT).

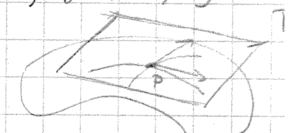


Kääntäen: Jos $t \mapsto (u(t), v(t))$ sileä, niin ehto $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ määrää sileän polun pinnalla S.

Toisaalta: $\forall$ polulla $\gamma: (\alpha,\beta) \to S$ kiinteällä $t_0 \in (\alpha,\beta)$ $\gamma(t) \in \sigma(U)$ $\forall\, t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ jollakin kartalla (σ, U) jollakin $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow$ riittää tarkastella muotoa $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ olevia polkuja (ainakin lokaalisti).

Määritelmä Pisteeseen $p \in S$ kuuluva tangenttiavaruus

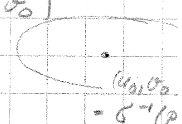
$$T_pS := \{ \gamma'(t_0) \mid \gamma: (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \to S \text{ sileä}, \ \gamma(t_0) = p \} \quad \varepsilon > 0$$



1.3. Lause Ol. $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ pinnan S parametrisointi s.e. $p \in \sigma(U)$ ja (u,v) σ:n välittämät koordinaatit. Tällöin

$T_pS = sp\{\sigma_u, \sigma_v\}$ on $\mathbb{R}^3$:n vektorialiavaruus.

Yllä $\sigma_u = \sigma_u(u_0,v_0)$, $\sigma_v = \sigma_v(u_0,v_0)$, $p = \sigma(u_0,v_0)$



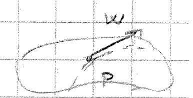
Tod: Ol γ sileä s.e. $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$

ketjus $\Rightarrow$

$$\gamma'(t) = \sigma_u u' + \sigma_v v' \in sp\{\sigma_u, \sigma_v\} \Rightarrow \text{"}\subset\text{"}$$

"$\supset$" Ol. $w \in sp\{\sigma_u, \sigma_v\}$ eli $w = \xi\sigma_u + \eta\sigma_v$ jollakin $\xi, \eta \in \mathbb{R}$

aset. $\gamma(t) := \sigma(u_0 + \xi t, v_0 + \eta t)$



γ sileä piste $t = 0$, $\gamma(0) = \sigma(u_0, v_0) = p$

$\Rightarrow \gamma'(t) = \sigma_u \xi + \sigma_v \eta$ □.

Huom Tangenttiavaruuden määritelmä on riippumaton parametrisoinnin σ valinnasta. (HT)

T_pS määrää 1-käs vektorista $N \perp T_pS$ $\|N\| = 1$.

Parametrisoinnin σ välittämä standardi yksikkönormaali määräytyy ehdosta

$$N_\sigma := \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}.$$

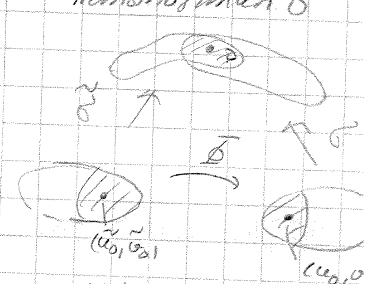
N_σ määräytyy suunnistusta vaille 1-käs: Jos $\tilde\sigma: \tilde U \to \mathbb{R}^3$ toinen parametrisointi pisteen p ympärissä, niin L.1.1 tod.

$$\tilde\sigma_{\tilde u} \times \tilde\sigma_{\tilde v} = J_\Phi\, \sigma_u \times \sigma_v, \text{ missä } p = \tilde\sigma(\tilde u_0, \tilde v_0) = \sigma(u_0, v_0)$$

ja $(u,v) = \Phi(\tilde u, \tilde v)$, $\Phi: \sigma^{-1} \circ \tilde\sigma$ transitiofunktio

J_Φ on Jacobin determinantti.

$\Rightarrow N_{\tilde\sigma} = \pm N_\sigma$.



Määritelmä

Sileä pinta S on suunnistuva jos sillä on kartasto, jonka transitiofunktioille pätee

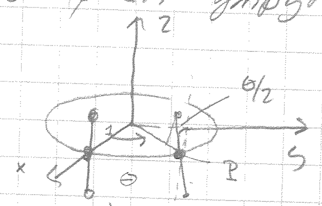
$J_\Phi > 0$ aina kun Φ määritelty.

1.4. Lause Sileän suunnistuvan pinnan kartasto määrää pinnan yksikkönormaalin 1-käsitteisesti. □.

Huom 1.4. pätee myös kääntäen. $\mathbb{R}^3$:n pinnoille siis: suunnistuvuus $\Leftrightarrow$ pinnan 2-puolisuus.

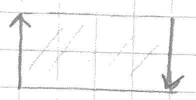
Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti, sillä suunnistuvuus on topologinen ominaisuus ja 2-puolisuus riippuu upotuksesta (esim. HT)

Esim 1° Möbiuksen nauha: alkutilassa z-akselin suuntainen jana $\{(1,0,t) \mid t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ pyörähtää kulman π keskipisteen P (alkutilassa $P = (1,0,0)$) suhteen pisteen P liikkuessa pitkin ympyrää $\{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$.



Parametrisointi $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(t,\theta) = \left((1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\cos\theta,\ (1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\sin\theta,\ t\cos\tfrac{\theta}{2} \right)$$



$U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 2\pi)$

$\tilde{\sigma}: \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ $\quad \tilde{U} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\pi, \pi)$ $\quad \tilde{\sigma} = \sigma$

$\{(\sigma, U), (\tilde{\sigma}, \tilde{U})\}$ on Möbiuksen nauhan kartasto (sään. HT)

$$\sigma_t = \left(-\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\theta,\ -\sin\tfrac{\theta}{2}\sin\theta,\ \cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_\theta = \left(-\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\cos\theta - (1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\sin\theta,\ -\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\theta + (1-t\sin\tfrac{\theta}{2})\cos\theta,\ -\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\right) \underset{t=0}{\overset{\text{pist.}}{=}} (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Pist. $t=0$:

$$\sigma_t \times \sigma_\theta = \left(-\cos\tfrac{\theta}{2}\cos\theta,\ -\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\theta,\ -\sin\tfrac{\theta}{2}\right)$$

$$\|\sigma_t \times \sigma_\theta\| = \cos^2\tfrac{\theta}{2}\cos^2\theta + \cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin^2\theta + \sin^2\tfrac{\theta}{2} = 1$$

$$\Rightarrow N_\sigma(0,\theta) = \left(-\cos\tfrac{\theta}{2}\cos\theta,\ -\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\theta,\ -\sin\tfrac{\theta}{2}\right)$$

Kuitenkin $N_\sigma(0,0) = (-1,0,0) \neq (1,0,0) = N_\sigma(0,2\pi)$

pisteessä $P = (1,0,0) = \sigma(0,0) = \sigma(0,2\pi)$

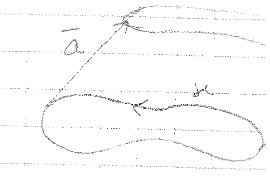
Siis: Möbiuksen nauha ei ole suunnistuva.

2° yleistetty sylinteri siirtämällä käyrää:

Ol. $\gamma: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$ ja $\bar{a}$ yksikkövektori

σ: $\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\bar{a}$, $\quad U \to \mathbb{R}^3$

$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < u < \beta\}$



Selvästi σ sileä jos γ sileä. Lisäksi

$$\sigma(u,v) = \sigma(u',v') \Leftrightarrow \gamma(u) - \gamma(u') = (v'-v)\bar{a},$$

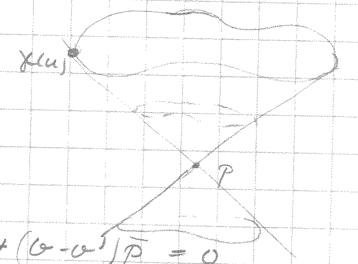
joten σ injektio $\Leftrightarrow$ $\bar{a}$:n suuntainen suora (*) kohtaa γ:n täsmälleen yhdessä pisteessä.

$\sigma_u = \gamma'$, $\sigma_v = \bar{a}$ $\Rightarrow$ $\sigma_u \times \sigma_v = \gamma' \times \bar{a}$, joten

σ sään $\Leftrightarrow$ γ sään ja $\gamma'(u) \nparallel \bar{a}$ $\forall u$ ja (*)

3° yleistetty kartio $= \bigcup_{u \in (\alpha,\beta)} sp\{\gamma(u) - \bar{p}\}$, $\quad \bar{p} \in \mathbb{R}^3$

ja $\gamma: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$.



$\sigma(u,v) = (1-v)\bar{p} + v\gamma(u)$

σ sileä jos γ on

$\sigma(u,v) = \sigma(u',v') \Leftrightarrow v\gamma(u) - v'\gamma(u') + (v-v')\bar{p} = 0$

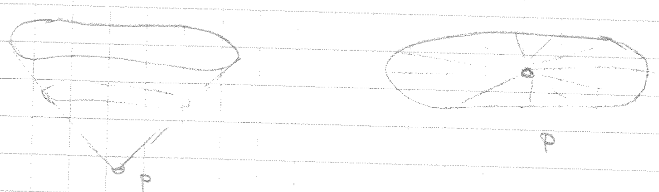
$\Leftrightarrow$ vektorit $\gamma(u), \gamma(u'), p$ samalla suoralla

Saatiin: σ injektio $\Leftrightarrow$ $sp\{\gamma(u) - \bar{p}\}$ sisältää täsmälleen yhden γ:n pisteen. (*)

$\sigma_u = v\gamma'$, $\quad \sigma_v = -\bar{p} + \gamma$ $\Rightarrow$

$$\sigma_u \times \sigma_v = -v\gamma' \times \bar{p} + v\gamma' \times \gamma = v\gamma' \times (\gamma - \bar{p})$$

Saatiin: σ sään ⟺ γ sään, $v \neq 0$, $\gamma' \nparallel \gamma - \bar{p}$ ja (α).

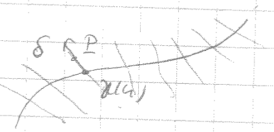


Edellisen yleistys:

4° <u>viivoitinpinta</u> $S = \bigcup_{u\in(\alpha,\beta)} L_{\gamma(u)}$, missä $\gamma : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$

ja $L_{\gamma(u)}$ on pisteen $\gamma(u)$ kautta kulkeva suora.

Ol. $\gamma(t) \cap L_{\gamma(u)} \neq \emptyset \Rightarrow t = u$



$\forall P \in S \ \exists_1 L_{\gamma(u)}$ s.e. $P \in L_{\gamma(u)}$

merk. $0 \neq \delta(u) \parallel sp\{P - \gamma(u)\}$

$\sigma(u,v) := \gamma(u) + v\,\delta(u)$, $v \in \mathbb{R}$

σ sileä kun γ, δ sileitä

$\sigma_u = \gamma' + v\delta'$, $\sigma_v = \delta$

$\Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v = \gamma' \times \delta + v\,\delta' \times \delta = (\gamma' + v\delta') \times \delta$

σ sään ⟺ $\gamma' + v\delta'$, δ lin riippumattomia

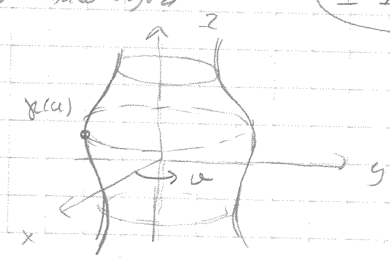
Erityisesti σ sään. kun γ', δ lin riippumattomia ja v riit. pieni.

5° <u>pyörähdyspinta</u> saadaan kun tasokäyrä (profiilikäyrä) pyörähtää samassa tasossa olevan suoran ympäri.

Ol. pyörähdysakseli = z-akseli ja tasokäyrä

$\gamma : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^2$ = xz-taso

on muotoa $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$



Parametrisointi

$\sigma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$

$\sigma_u = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u))$

$\sigma_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0)$

$\sigma_u \times \sigma_v = (-g'(u)f(u)\cos v, -f(u)g'(u)\sin v, f'(u)f(u))$

$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = g'^2 f^2 + f'^2 f^2 = (g'^2 + f'^2) f^2$

$\neq 0$ kun $f(u) \neq 0 \neq g'^2(u) + f'^2(u)$ $\forall u$

Voi ol. $f(u)$ (= pisteen $\sigma(u,v)$ etäisyys z-akselista) > 0

σ injektio kun γ injektio ja $v \in (\alpha,\beta)$ $\beta - \alpha \in (0, 2\pi)$

Käänteiskuvauslauseen soveltamisesta: II 1.13

Ol. $f: U \to \mathbb{R}^n$ C^∞, $U \subset_o \mathbb{R}^m$ ja

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

lin. kuvauksen $(Df)(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ esitysmatriisi $\mathbb{R}^m$:n ja $\mathbb{R}^n$:n standardikantojen suhteen pisteessä $x \in U$.

Tällöin pätee käänteiskuvauslause: Ol. $n = m$.

Jos $(Df)(x_0)$ on kääntyvä jollakin $x_0 \in U$ ($\Leftrightarrow J(f(x_0)) = \det(Df)(x_0) \neq 0$) niin löytyy avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ ja sileä kuvaus $g: V \to \mathbb{R}^n$ s.e. pätee:

(1) $y_0 = f(x_0) \in V$

(2) $g(y_0) = x_0$

(3) $g(V) \subset U$

(4) $g(V) \subset_o \mathbb{R}^n$

(5) $f(g(y)) = y \quad \forall y \in V$

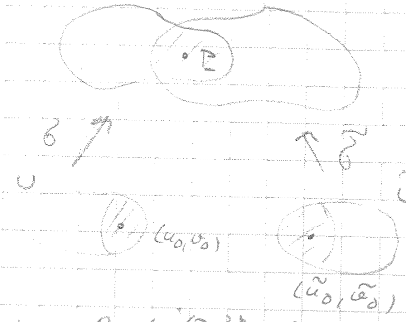
Erityisesti siis $g: V \to g(V)$, $f: g(V) \to V$ ovat toistensa käänteiskuvauksia.

Osoitetaan tämän avulla: II 1.1

1.5. Lause "Sileän pinnan transitiofunktiot ovat sileitä".

Tod: Ol. $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde\sigma: \tilde U \to \mathbb{R}^3$ S:n parametrisointeja ja $\sigma(U) \cap \tilde\sigma(\tilde U) \neq \emptyset$

ol. $\sigma(u_0, v_0) = \tilde\sigma(\tilde u_0, \tilde v_0) = P$



Merk. $\sigma(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$

$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \Rightarrow$

$$D\sigma = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix} = (\sigma_u \ \sigma_v) \text{ ja } \operatorname{Rank}(D\sigma) = 2$$

$\Rightarrow \forall (u,v)$ jokin matriiseista $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$ on kääntyvä $\left(\sigma_u \times \sigma_v = \left(\begin{vmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} f_u & h_u \\ f_v & h_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{vmatrix} \right)\right.$

Voi ol. $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$ kääntyvä pisteessä P.

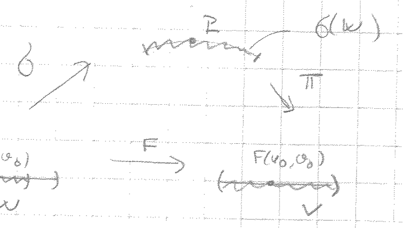
Sovelletaan käänteiskuvauslausetta funktioon

$F: U \to \mathbb{R}^2$ $\quad F(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$.

$\Rightarrow$ löytyy $V \subset_o \mathbb{R}^2$ s.e. $F(u_0, v_0) \in V$ ja $W \subset_o U$ s.e. $F: W \to V$ bijektio ja $F^{-1}: V \to W$ sileä.

$\sigma|_W : W \to \sigma(W)$ bijektio $\Rightarrow$ projektio $\pi: \sigma(W) \to V$

$\pi(x,y,z) = (x,y)$ bijektio,



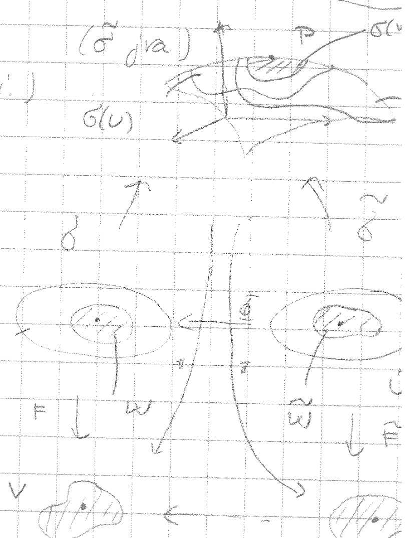
sillä pätee $\pi \circ \sigma|_W = \pi \circ (f,g,h)|_W$

$= (f,g)|_W = F|_W$

II 1.1

joten $\pi = F|_W \circ \sigma^{-1}|_W$ bij. Voi ol. $\sigma(W) \subset \tilde U$.

$\tilde W := \tilde\sigma^{-1}(\underbrace{\sigma(W)}_{\subset_o S}) \subset_o \tilde U$ ($\tilde\sigma$ jva) (σ jva bij.)



Lisäksi

$\Phi := \sigma^{-1} \circ \tilde\sigma|_{\tilde W} = F^{-1} \circ \tilde F|_{\tilde W}$,

missä $\tilde F = \pi \circ \tilde\sigma$ sileä $\tilde W$:ssä

$\Rightarrow$ väite. □

1.6. Lause

Ol. $S \subset \mathbb{R}^3$ s.e. $\forall P \in S$

$\exists W \subset_o \mathbb{R}^3$, $P \in W$ ja sileä $f: W \to \mathbb{R}$ s.e.

(i) $S \cap W = \{(x,y,z) \in W \mid f(x,y,z) = 0\}$

(ii) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right) \neq 0$

Tällöin S on sään. pinta

Tod: Ol. $P = (x_0, y_0, z_0)$. Voi ol $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$. Aset $F: W \to \mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z))$ (Jos $f_x \neq 0$ aset $F(x,y,z) = (f(x,y,z), y, z)$
" $f_y \neq 0$ " " $(x, f(x,y,z), z)$)

$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$ ja $DF(P)$ kääntyvä, sillä $f_z(P) \neq 0$.

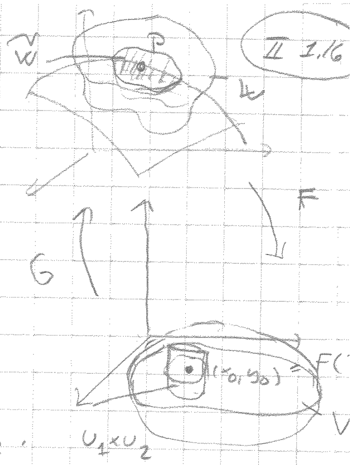
KKL $\Rightarrow$ $\exists V \subset_o \mathbb{R}^3$ s.e. $F(P) = (x_0, y_0, 0) \in V$ ja

sileä $G: V \to W$ s.e. $\tilde W = G(V) \subset_o \mathbb{R}^3$ ja

$F: \tilde W \to V$, $G: V \to \tilde W$ toistensa käänteiskuvauksia.

II 1.16

$V \subset_o \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists U_1 \subset_o \mathbb{R}^2$, $U_2 \subset_o \mathbb{R}$
s.e. $(x_0, y_0) \in U_1$, $0 \in U_2$ s.e.
$U_1 \times U_2 \subset V$



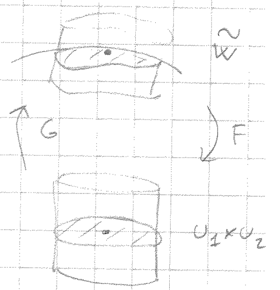
Voidaan ol $V = U_1 \times U_2$

Täten $G(x,y,w) = (x, y, g(x,y,w))$

jollakin $g: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ ja

$f(x,y,g(x,y,w)) = w \quad \forall (x,y) \in U_1,\ w \in U_2$.

Aset. $\sigma: U_1 \to \mathbb{R}^3$ $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y,0))$



σ homeomorfismi kuvajoukolleen $\sigma(U_1) = S \cap \tilde W$

$\sigma^{-1} = \pi|_{S \cap \tilde W}$ $\quad \pi(x,y,z) = (x,y)$

σ sään: sileys selvä,

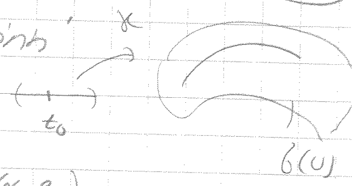
$\sigma_x = (1, 0, g_x)$ $\quad \sigma_y = (0, 1, g_y)$

$\sigma_x \times \sigma_y = (-g_x, -g_y, 1) \neq 0$. □

2. Ensimmäinen perusmuoto

Ol. $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ sään. parametrisointi

ja $\gamma : (\alpha,\beta) \to \sigma(U)$ sen polku



$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$. Olk. $t_0 \in (\alpha,\beta)$

polun kaarenpituus $\quad s = \ell(\gamma|_{[t_0,t]}) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tilde t)\| \, d\tilde t$

ketjus. $\Rightarrow \gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$

$$\Rightarrow \|\gamma'\|^2 = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_u u' + \sigma_v v')$$

$$= \sigma_u \cdot \sigma_u u'^2 + 2\sigma_u \cdot \sigma_v u'v' + \sigma_v \cdot \sigma_v v'^2$$

$$=: E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2$$

Saatiin $\quad s = \int_{t_0}^{t} (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{1/2} \, dt$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(E(u'dt)^2 + 2F u'v' dt^2 + G(v'dt)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \int_{\gamma} (E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)^{1/2}$$

$$= \int_{\gamma} \sqrt{ds^2} \qquad (!)$$

Lauseke $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ on parametrisoinnin σ liittyvä ensimmäinen perusmuoto

ds^2 (tai paremminkin ds) antaa pinnan metriikan kaarenpituuselementin.

Huom ds^2 määrää myös metriikan $\sigma(U)$:lle

$d(p,q) = \inf_{\gamma} \{ \ell(\gamma) \mid \gamma$ pisteet $p,q \in \sigma(U)$ yhdistävä polku $\gamma : (\alpha,\beta) \to \sigma(U) \}$

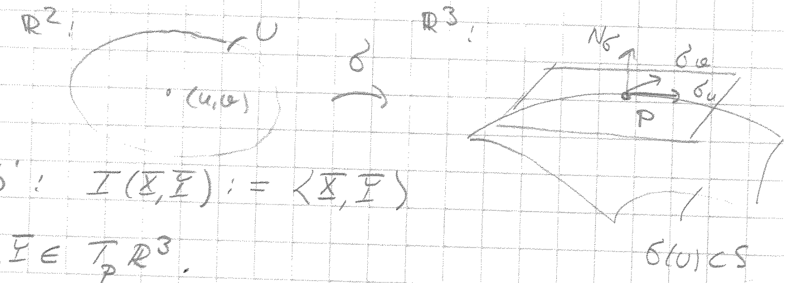
Ensimmäisen perusmuodon tulkinta parametriperheenä

sisätuloja $I : p \mapsto I_p$, $I_p = \langle \, , \rangle_p$, missä $\langle \, , \rangle_p$

avaruuden $T_p\mathbb{R}^3 = \mathrm{sp}\{\sigma_u, \sigma_v, N_\sigma\}$ $\quad p = \sigma(u,v)$

sisätulon $\langle \, , \rangle$ ($\mathbb{R}^3$:n euklidinen sisätulo: $\langle \bar X, \bar Y \rangle = \bar X \cdot \bar Y$,

$\bar X, \bar Y \in \mathbb{R}^3$) rajoittuma tangenttiavaruuteen T_pS.



Merk. lyhyesti: $I(\bar X, \bar Y) := \langle \bar X, \bar Y \rangle$

$\quad \forall \, \bar X, \bar Y \in T_p\mathbb{R}^3$.

I indusoi symmetrisen bilineaarimuodon myös pisteeseen

$(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ liittyvään tangenttiavaruuteen $T_{(u,v)}U \cong \mathbb{R}^2$

parametrisoinnin σ välityksellä: $\forall \; V, W \in T_{(u,v)}U$

$$I_{(u,v)}(V,W) \mapsto \langle D\sigma(u,v)V, D\sigma(u,v)W \rangle = \langle \underbrace{(D\sigma(u,v))^T D\sigma(u,v)}_{=: g_{ij}(u,v)} V, W \rangle$$

Jos $V = (v^1, v^2)$, $W = (w^1, w^2) \in T_{(u,v)}U$

niin merk. $\quad I_{(u,v)}(V,W) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u,v) v^i w^j$,

missä $(g_{ij}(u,v))$ 2×2 matriisi. Etsitään tämän

matriisin esitys $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$:n välittämissä koordinaateissa

$$g_{ij} = D\sigma^T D\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u^1 & \sigma_v^1 \\ \sigma_u^2 & \sigma_v^2 \\ \sigma_u^3 & \sigma_v^3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\sigma_u^1)^2 + (\sigma_u^2)^2 + (\sigma_u^3)^2 & \sigma_u^1\sigma_v^1 + \sigma_u^2\sigma_v^2 + \sigma_u^3\sigma_v^3 \\ \sigma_v^1\sigma_u^1 + \sigma_v^2\sigma_u^2 + \sigma_v^3\sigma_u^3 & (\sigma_v^1)^2 + (\sigma_v^2)^2 + (\sigma_v^3)^2 \end{pmatrix}$$

positiivinen symmetrinen 2×2 matriisi

Voidaan kirjoittaa:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} I(\sigma_u,\sigma_u) & I(\sigma_u,\sigma_v) \\ I(\sigma_v,\sigma_u) & I(\sigma_v,\sigma_v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_u\cdot\sigma_u & \sigma_u\cdot\sigma_v\\ \sigma_v\cdot\sigma_u & \sigma_v\cdot\sigma_v\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}, \quad (u,v)\mapsto E(u,v),\ F(u,v),\ G(u,v)$$ kuten edellä

<u>Sanotaan</u>: Matriisi (g_{ij}) on parametrisointiin σ liittyvä <u>metrinen tensori</u>.

<u>Huom</u> neliömuoto $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ operoi vektorikenttiin: $V = (V^1, V^2) \overset{\text{merk}}{=} V^1\frac{\partial}{\partial u} + V^2\frac{\partial}{\partial v}$ ja $W = W^1\frac{\partial}{\partial u}+W^2\frac{\partial}{\partial v}$, missä $T_{(u,v)}U = \mathrm{sp}\left\{\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right\}$ ja $\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}$ merkintä koordinaattien u,v suuntaisille yksikkövektoreille.

$$ds^2(V,W) = E\,du^2(V,W) + 2F\,du\,dv(V,W) + G\,dv^2(V,W)$$
$$:= EV^1W^1 + F(V^1W^2+W^1V^2) + GV^2W^2$$

Tämä vastaa matriisioperaatiota

$$\left\langle \begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V^1\\V^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}W^1\\W^2\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}EV^1+FV^2\\FV^1+GV^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}W^1\\W^2\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$= EV^1W^1 + F(V^2W^1+V^1W^2) + GV^2W^2.$$

<u>Esim</u> 1° Jos $\bar p\perp\bar q$ $\|\bar p\|=\|\bar q\|=1$ niin $\sigma(u,v) = \bar a + u\bar p + v\bar q$ on pisteen $\bar a$ kautta kulkevan tason $\mathrm{sp}\{\bar p,\bar q\}$ suuntaisen tason parametrisointi.

$\sigma_u = \bar p$, $\sigma_v = \bar q$ $\quad \sigma_u\times\sigma_v = \bar p\times\bar q \Rightarrow \sigma$ sään.

$$\left.\begin{aligned} E &= \sigma_u\cdot\sigma_u = \|\bar p\|^2 = 1\\ F &= \sigma_u\cdot\sigma_v = \bar p\cdot\bar q = 0\\ G &= \sigma_v\cdot\sigma_v = \|\bar q\|^2 = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{1. perusmuoto} = du^2 + dv^2$$

2° Pallo $\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$

$\sigma_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\sigma_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$

$E = \sigma_\theta\cdot\sigma_\theta = \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = 1$

$F = \sigma_\theta\cdot\sigma_\varphi = \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi - \sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi = 0$

$G = \sigma_\varphi\cdot\sigma_\varphi = \cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi = \cos^2\theta$

$\Rightarrow$ 1. perusmuoto $d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2$

3° Yleistetty sylinteri $\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\bar a$

ol. $\|\gamma'\| = 1$, $\|\bar a\| = 1$ $|\gamma| \subset$ taso $\perp \bar a$

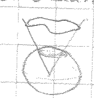
$\sigma_u = \gamma'$, $\sigma_v = \bar a$

$$\left.\begin{aligned} E &= \|\sigma_u\|^2 = \|\gamma'\|^2 = 1\\ F &= \sigma_u\cdot\sigma_v = \gamma'\cdot\bar a = 0\\ G &= \|\sigma_v\|^2 = \|\bar a\|^2 = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{1. perusmuoto} = du^2 + dv^2$$

kuten taso!

4° yleistetty kartio $\sigma(u,v) = (1-v)\bar p + v\gamma(u)$

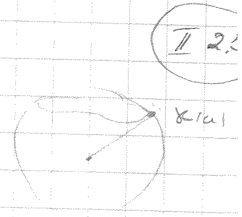
Voi ol. $\bar p = 0$ (siirto ei vaikuta 1. perusmuotoon (HT)) ja $\|\gamma(u)\| = 1$ (Valitaan γ uudestaan leikkaamalla kartio yksikköpallolla) γ sään. $\|\gamma'\| = 1$.



$\sigma_u = v\gamma'$ $\sigma_v = \gamma$ II 2.3

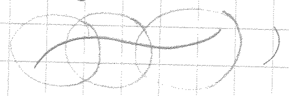
$$\left.\begin{aligned} E &= \|\sigma_u\|^2 = v^2\|\gamma'\|^2 = v^2 \\ F &= \sigma_u\cdot\sigma_v = v\gamma'\cdot\gamma = 0 \\ G &= \|\sigma_v\|^2 = \|\gamma\|^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{1. perusmuoto } v^2du^2 + dv^2$$

riippumaton polusta γ!

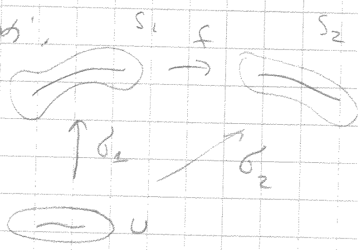


Määritelmä Ol. S_1, S_2 sään. pintoja. Diffeomorfismi $f: S_1 \to S_2$ on isometria jos se kuvaa S_1:n polut samanpituisiksi poluiksi pinnalla S_2.

2.1. Lause Diffeomorfismi $f: S_1 \to S_2$ on isometria jos ja vain jos S_1:n sään. parametrisoinnilla σ_1 ja S_2:n parametrisoinnilla $f\circ\sigma_1$ on sama ensimmäinen perusmuoto.

Tod: Riittää tarkastella yhtä säännöllistä parametrisointia $\sigma_1: U \to \mathbb{R}^3$ (additiivisuus ) L.1.2. $\Rightarrow$

$\sigma_2 = f\circ\sigma_1$ S_2:n sään. parametrisointi.



"$\Leftarrow$" Ol. $t \mapsto (u(t), v(t))$ U:n sään. polku

$\gamma_1: \gamma_1(t) = \sigma_1(u(t), v(t)) \in S_1$

$\gamma_2: \gamma_2(t) = \sigma_2(u(t), v(t)) \in S_2$

Tällöin $f(\gamma_1(t)) = f(\sigma_1(u(t), v(t))) = \sigma_2(u(t), v(t)) = \gamma_2(t)$ $\forall t$

Molemmilla poluilla sama pituus, sillä se saadaan integroimalla lauseketta $(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{1/2}$,

missä $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ yhteinen 1. perusmuoto.

"$\Rightarrow$" Ol. f isometria ja $t \mapsto (u(t), v(t))$ U:n polku. Poluilla $\gamma_1(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ ja $\gamma_2(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ on sama pituus. Ol. (α, β) parametriväli. $\forall\, t_0, t \in (\alpha, \beta)$

$$\int_{t_0}^{t} (E_1u'^2 + 2F_1u'v' + G_1v'^2)^{1/2}dt = \int_{t_0}^{t} (E_2u'^2 + 2F_2u'v' + G_2v'^2)^{1/2}dt,$$

missä E_1, F_1, G_1 σ_1:n 1. perusmuodon kertoimet

E_2, F_2, G_2 σ_2:n — " — — " —

$\forall\, t_0, t$

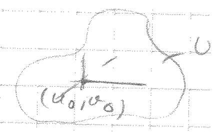
$\Rightarrow$ $E_1u'^2 + 2F_1u'v' + G_1v'^2 = E_2u'^2 + 2F_2u'v' + G_2v'^2$ (*)

Olk. $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ja $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$

Soveltamalla yhtälöä (*) seuraaviin U:n polkuihin $t \mapsto (u(t), v(t))$

(i) $u(t) = u_0 + t - t_0$, $v = v_0$ $\Rightarrow$ $u' = 1$, $v' = 0$

$\Rightarrow$ $E_1 = E_2$



(ii) $u = u_0$, $v(t) = v_0 + t - t_0$ $\Rightarrow$ $u' = 0$, $v' = 1$

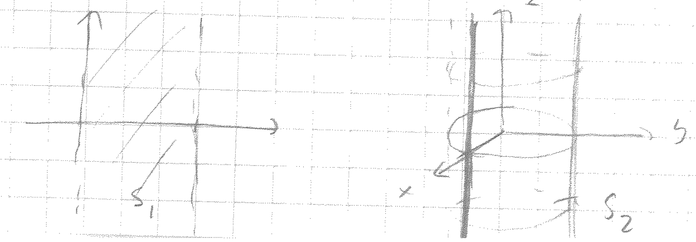
$\Rightarrow$ $G_1 = G_2$

(iii) $u(t) = u_0 + t - t_0$, $v(t) = v_0 + t - t_0$ $\Rightarrow$ $u' = 1 = v'$

$\Rightarrow$ $E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2 \overset{(i)}{\underset{(ii)}{\Rightarrow}} F_1 = F_2$. □

Esim $S_1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 2\pi\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$



II 2.7

$\sigma_1 : (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \sigma_1(u,v) = (u,v,0)$

koko S_1:n parametrisointi

$\sigma_2 : (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \sigma_2(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

koko S_2:n parametrisointi. Esim 1° 3° edellä

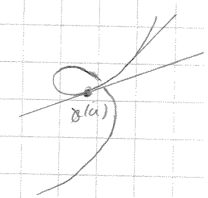
$\Rightarrow$ σ_1:n ja σ_2:n 1. perusmuoto sama $\Rightarrow$

$f : f(u,v,0) = (\cos u, \sin u, v) \qquad f : S_1 \to S_2$ on isometria.

Esim Käyrän tangentin kehittämä pinta $S = \bigcup_{u\in(\alpha,\beta)} \mathrm{sp}\{\gamma'(u)\}$.

$\gamma : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$ sään. ja $\|\gamma'(t)\| = 1$

pisteen $p \in S$ ympäristön parametrisointi:



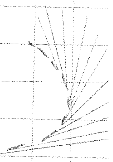
$\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\gamma'(u), \quad v \in \mathbb{R}$

$\sigma_u = \gamma'(u) + v\gamma''(u), \quad \sigma_v = \gamma'(u)$

$\Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v = v\gamma''(u)\times\gamma'(u)$ sään. ~~$\forall v \neq 0 + \gamma''(u)$~~

jos σ injektio.

Frenet: $\begin{cases} e_1 = \gamma' \\ \gamma'' = \kappa e_2 \\ e_3 = e_1 \times e_2 \end{cases} \to \sigma_u \times \sigma_v = v\kappa\, e_2 \times e_1 = -v\kappa\, e_3$



$\therefore$ σ sään $\Leftrightarrow$ σ inj, $\kappa \neq 0$, $v \neq 0$ (γ:n pisteet poistettava)

2.2. Lause Käyrän tangentin kehittämä pinta on isometrinen tason avoimen osajoukon kanssa.

Tod: $E = \sigma_u \cdot \sigma_u = (\gamma' + v\gamma'')(\gamma' + v\gamma'') = \|\gamma'\|^2 + v^2\|\gamma''\|^2 = 1 + v^2\kappa^2$

kun $\|\gamma'\| = 1$

II 2

$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = (\gamma' + v\gamma'')\cdot\gamma' = \|\gamma'\|^2 + v\gamma''\gamma' = 1$

$G = \sigma_v \cdot \sigma_v = \gamma' \cdot \gamma' = 1$

$\Rightarrow$ 1. perusmuoto $ds^2 = (1 + v^2\kappa^2)\,du^2 + 2\,du\,dv + dv^2$

Pitää os: aso tason parametrisoinnissa s.e. sama 1. perusmuoto

Olk $\tilde\gamma$ tasokäyrä s.e. $\tilde\kappa_s = \kappa > 0$. Tällainen $\tilde\gamma$ aina löytyy L. I.2.3. perusteella. $\tilde\gamma$:n tangentin kehittämä pinnan parametrisointi $\tilde\sigma(u,v) = \tilde\gamma(u) + v\tilde\gamma'(u)$

$\Rightarrow \tilde E = E, \ \tilde F = F, \ \tilde G = G$ kun $\|\tilde\gamma'\| = 1$.

Lisäksi $|\tilde\gamma| \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \tilde\gamma'(t) \in \mathbb{R}^2 \ \forall t$

$\Rightarrow \tilde\sigma(u,v) = \tilde\gamma(u) + v\tilde\gamma'(t)$ avoimen tasojoukon parametrisointi kun $v \neq 0$ ja $\tilde\sigma$ inj. □.

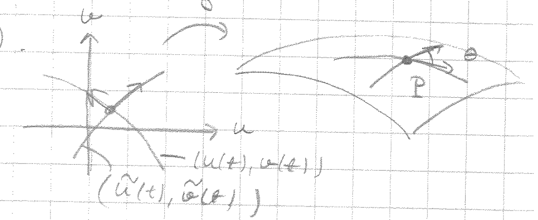
Huom Voidaan os. myös käänteinen väite: $\forall$ riittävän pieni pinnan osa, joka isometrinen tason avoimen joukon kanssa on

a) taso b) yleistetty sylinteri c) yleistetty kartio

d) käyrän tangentin kehittämä pinta tai niiden osa.

Ol. $t \mapsto \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, $t \mapsto \tilde\gamma(t) = \sigma(\tilde u(t), \tilde v(t))$

polkuja, $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ sileän pinnan S sään. parametrisointi ja $\gamma(t_0) = P = \tilde\gamma(t_0) \in \sigma(U)$.



Aset $\theta = \sphericalangle(\gamma(t_0), \tilde\gamma(t_0)) :=$

$\sphericalangle(\gamma'(t_0), \tilde\gamma'(t_0))$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\gamma'(t_0)\cdot\tilde\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|\,\|\tilde\gamma'(t_0)\|}$$

Ketjus $\Rightarrow$ $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$ $\quad \tilde\gamma' = \sigma_u \tilde u' + \sigma_v \tilde v'$

$$\Rightarrow \gamma'\cdot\tilde\gamma' = \sigma_u\cdot\sigma_u\, u'\tilde u' + \sigma_u\cdot\sigma_v\, u'\tilde v' + \sigma_v\cdot\sigma_u\, v'\tilde u' + \sigma_v\cdot\sigma_v\, v'\tilde v'$$

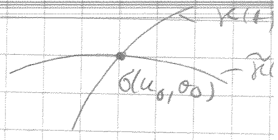
$$= Eu'\tilde u' + F(u'\tilde v' + v'\tilde u') + G v'\tilde v'$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{Eu'\tilde u' + F(u'\tilde v' + v'\tilde u') + G v'\tilde v'}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{1/2}(E\tilde u'^2 + 2F\tilde u'\tilde v' + G\tilde v'^2)^{1/2}}$$

Esim koordinaattikäyrille $\gamma(t) = \sigma(u_0, v_0 + t - t_0)$, $\tilde\gamma(t) = \sigma(u_0 + t - t_0, v_0)$

saadaan $u(t) \equiv u_0$, $v(t) = v_0 + t - t_0$

$\tilde u(t) = u_0 + t - t_0$, $\tilde v(t) \equiv v_0$



$\Rightarrow u' \equiv 0 \equiv \tilde v'$, $v' \equiv 1 = \tilde u'$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Erityisesti $\gamma'(t_0) \perp \tilde\gamma'(t_0) \iff F = 0$.

Määritelmä Jos S_1, S_2 sileitä pintoja, niin diffeomorfismi $f: S_1 \to S_2$ on konforminen jos $\sphericalangle(\gamma'(t_0), \tilde\gamma'(t_0)) = \sphericalangle((f\circ\gamma)'(t_0), (f\circ\tilde\gamma)'(t_0))$ $\forall$ sään $\gamma, \tilde\gamma$ s.e. $\gamma(t_0) = \tilde\gamma(t_0)$ eli f säilyttää kulmat

Erityisen kiinnostavia ovat sään. parametrisoinnit

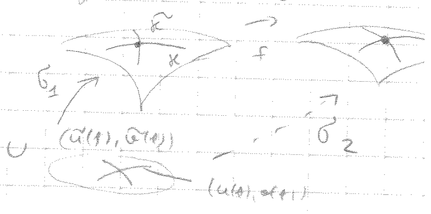
$\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ jotka konformisia (=konforminen parametrisointi)

2.3. Lause Diffeomorfismi $f: S_1 \to S_2$ on konforminen

$\iff$ S_1:n parametrisoinnilla σ_1, σ_1:n ja $f\circ\sigma_1$:n ensimmäiset perusmuodot ovat keskenään (pisteittäin) verrannollisia.

Tod: Lokaali väite $\Rightarrow$ riittää tark. yhtä parametrisointia

$\sigma_1: U \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_2 = f\circ\sigma_1: U \to \mathbb{R}^3$



"$\Leftarrow$" $E_2\, du^2 + 2F_2\, du\,dv + G_2\, dv^2$

(*) $= \lambda(E_1\, du^2 + 2F_1\, du\,dv + G_1\, dv^2)$,

missä (E_1, F_1, G_1) σ_1:n 1. perusmuodon kertoimet
(E_2, F_2, G_2) σ_2 " "

$\lambda: U \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \lambda(u,v)$ sileä (verrannollisuus) funktio.

$E_1, G_1 > 0 \Rightarrow \lambda(u,v) > 0 \ \forall (u,v)$

Ol. $\gamma, \tilde\gamma$ $\sigma_1(U)$:n polkuja $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$,

$\tilde\gamma(t) = \sigma_1(\tilde u(t), \tilde v(t))$ ja $\gamma(t_0) = \tilde\gamma(t_0)$

$t \mapsto (f\circ\gamma)(t) = f(\sigma_1(u(t), v(t))) = \sigma_2(u(t), v(t)) \in \sigma_2(U)$
vast.
$t \mapsto (f\circ\tilde\gamma)(t) = f(\sigma_1(\tilde u(t), \tilde v(t))) = \sigma_2(\tilde u(t), \tilde v(t)) \in \sigma_2(U)$

näiden välinen kulma θ pist. $\sigma_2(u(t_0), v(t_0)) = \sigma_2(u(t_0), v(t_0))$:

$$\cos\theta = \frac{E_2 u'\tilde u' + F_2(u'\tilde v' + v'\tilde u') + G_2 v'\tilde v'}{(E_2 u'^2 + 2F_2 u'v' + G_2 v'^2)^{1/2}(E_2\tilde u'^2 + 2F_2\tilde u'\tilde v' + G_2\tilde v'^2)^{1/2}}$$

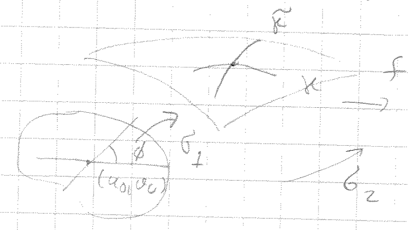
$$\overset{(*)}{=} \frac{E_1 u'\tilde u' + F_1(u'\tilde v' + v'\tilde u') + G_1 v'\tilde v'}{(E_1 u'^2 + 2F_1 u'v' + G_1 v'^2)^{1/2}(E_1\tilde u'^2 + 2F_1\tilde u'\tilde v' + G_1\tilde v'^2)^{1/2}} = \sphericalangle(\tilde\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))$$

$\Rightarrow f$ konf.

"=>" Pitää os: Jos $\angle(\tilde\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)) = \angle((f\circ\tilde\gamma)'(t_0), (f\circ\gamma)'(t_0))$

$\forall$ $t\mapsto\gamma(t)=\sigma_1(u(t),v(t))$, $t\mapsto\tilde\gamma(t)=\sigma_1(\tilde u(t),\tilde v(t))$ s.e. $\gamma(t_0)=\tilde\gamma(t_0)$

niin perusmuodot verrannollisia.



Olk. $(u_0,v_0)\in U$ ja

$\gamma(t)=\sigma_1(u_0+t,v_0)$

$\tilde\gamma(t)=\sigma_1(u_0+t\cos\phi,\ v_0+t\sin\phi)$ $\qquad \gamma(0)=\sigma_1(u_0,v_0)=\tilde\gamma(0)$

Ol. $u(t)=u_0+t$, $v(t)\equiv v_0$, $\tilde u(t)=u_0+t\cos\phi$, $\tilde v(t)=v_0+t\sin\phi$

$\Rightarrow u'(t)\equiv 1$, $v'(t)\equiv 0$, $\tilde u'(t)=\cos\phi$, $\tilde v'(t)=\sin\phi$

$$\Rightarrow \cos\angle(\gamma'(0),\tilde\gamma'(0)) = \frac{E_1\cos\phi+F_1\sin\phi}{[E_1(E_1\cos^2\phi+2F_1\cos\phi\sin\phi+G_1\sin^2\phi)]^{1/2}}$$

ol. ||

$$\cos\angle((f\circ\gamma)'(0),(f\circ\tilde\gamma)'(0)) = \frac{E_2\cos\phi+F_2\sin\phi}{[E_2(E_2\cos^2\phi+2F_2\cos\phi\sin\phi+G_2\sin^2\phi)]^{1/2}}$$

$$\Leftrightarrow (E_1\cos\phi+F_1\sin\phi)^2E_2(E_2\cos^2\phi+2F_2\cos\phi\sin\phi+G_2\sin^2\phi)$$
$$=(E_2\cos\phi+F_2\sin\phi)^2E_1(E_1\cos^2\phi+2F_1\cos\phi\sin\phi+G_1\sin^2\phi)$$

Kirj. $(E_1\cos\phi+F_1\sin\phi)^2 = E_1^2\cos^2\phi+2E_1F_1\cos\phi\sin\phi+F_1^2\sin^2\phi$

$$=E_1(E_1\cos^2\phi+2F_1\cos\phi\sin\phi+G_1\sin^2\phi)+(F_1^2-E_1G_1)\sin^2\phi$$

ja $(E_2\cos\phi+F_2\sin\phi)^2=E_2(E_2\cos^2\phi+2F_2\cos\phi\sin\phi+G_2\sin^2\phi)+(F_2^2-E_2G_2)\sin^2\phi$

$$\Rightarrow \big(E_1(E_1\cos^2\phi+2F_1\cos\phi\sin\phi+G_1\sin^2\phi)+(F_1^2-E_1G_1)\sin^2\phi\big)E_2(E_2\cos^2\phi+2F_2\cos\phi\sin\phi+G_2\sin^2\phi)$$
$$=\big(E_2(E_2\cos^2\phi+2F_2\cos\phi\sin\phi+G_2\sin^2\phi)+(F_2^2-E_2G_2)\sin^2\phi\big)E_1(E_1\cos^2\phi+2F_1\cos\phi\sin\phi+G_1\sin^2\phi)$$

$$\Leftrightarrow (F_1^2-E_1G_1)E_2(E_2\cos^2\phi+2F_2\cos\phi\sin\phi+G_2\sin^2\phi)=$$
$$(F_2^2-E_2G_2)E_1(E_1\cos^2\phi+2F_1\cos\phi\sin\phi+G_1\sin^2\phi)$$

$$\Leftrightarrow \big((F_1^2-E_1G_1)E_2^2-(F_2^2-E_2G_2)E_1^2\big)\cos^2\phi\ +$$
$$2\big[(F_1^2-E_1G_1)E_2F_2-(F_2^2-E_2G_2)E_1F_1\big)\cos\phi\sin\phi\ + \qquad (*)$$
$$\big((F_1^2-E_1G_1)E_2G_2-(F_2^2-E_2G_2)E_1G_1\big)\sin^2\phi=0$$

$\phi=0 \Rightarrow (F_1^2-E_1G_1)E_2^2-(F_2^2-E_2G_2)E_1^2=0$ a)

$\phi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow F_1^2E_2G_2-F_2^2E_1G_1=0$ b)

$(*) \Rightarrow (F_1^2-E_1G_1)E_2F_2-(F_2^2-E_2G_2)E_1F_1=0$ c)

$F_i^2-E_iG_i\neq 0$, sillä jos $F_i^2=E_iG_i$ niin

$\|\sigma_u\cdot\sigma_v\|^2=\|\sigma_u\|^2\|\sigma_v\|^2 \Rightarrow \sigma_u \parallel \sigma_v$ mutta σ_i sään. ↯.

Merk $\lambda=\dfrac{(F_2^2-E_2G_2)E_1}{(F_1^2-E_1G_1)E_2} \overset{a)}{\Rightarrow} E_2=\lambda E_1$

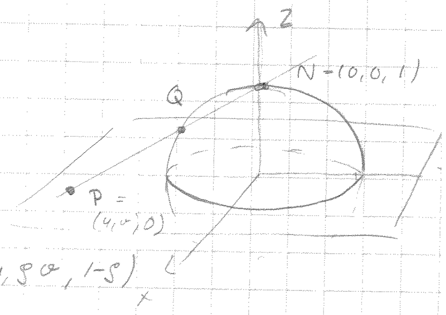
c) $\Rightarrow F_2=\lambda F_1$, b) $\Rightarrow F_1^2\lambda E_1G_2=\lambda^2F_1^2E_1G_1$

$\overset{\lambda,E_1>0}{\Rightarrow} F_1^2G_2=\lambda F_1^2G_1$, jos $F_1\neq 0 \Rightarrow G_2=\lambda G_1$

jos $F_1=0 \Rightarrow F_2=0 \overset{a)}{\Rightarrow} E_1G_1(\lambda E_1)^2=\lambda E_1G_2E_1^2$

$\overset{E_1,\lambda>0}{\Rightarrow} G_2=\lambda G_1$. □

Esim. stereografinen projektio



Ol $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$

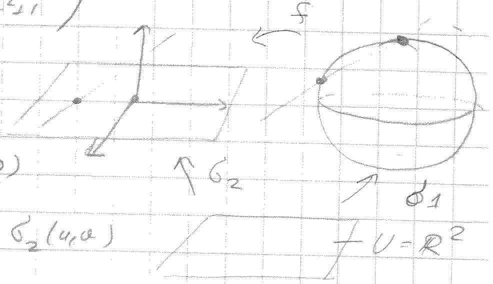
$\exists\ \rho\in\mathbb{R}$ s.t. $\bar Q-\bar N=\rho(\bar P-\bar N)$

$\Rightarrow \bar Q=(0,0,1)+\rho((u,v,0)-(0,0,1))=(\rho u,\rho v,1-\rho)$

$Q\in S \Rightarrow \rho^2u^2+\rho^2v^2+(1-\rho)^2=1 \Leftrightarrow \rho^2(u^2+v^2+1)-2\rho=0$

$\Leftrightarrow (\rho=0\ \lor)\ \rho=\dfrac{2}{u^2+v^2+1}$

$$\Rightarrow \bar{\varphi} = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right) =: \sigma_1(u,v)$$



$\sigma_1 : \mathbb{R}^2 \to S\setminus\{N\}$

Asef.

$\sigma_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_2(u,v) = (u,v,0)$

$f : S\setminus\{N\} \to \mathbb{R}^2 \qquad \sigma_1(u,v) \longmapsto \sigma_2(u,v)$

on stereografinen projektio

V: f konforminen.

Riittää os L.2.3. $\Rightarrow$ σ_2:n ens. perusmuoto verrannollinen

$\sigma_2 = f\circ\sigma_1$:n 1. perusmuotoon du^2+dv^2.

$$\sigma_{1u} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\Big(2(u^2+v^2+1) - 2u\cdot 2u,\ -4uv,\ 2u(u^2+v^2+1) - 2u(u^2+v^2-1) \Big)$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\Big(2(v^2-u^2+1), -4uv, 4u \Big)$$

$$\sigma_{1v} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\Big(-4uv,\ 2(u^2+v^2+1) - 4v^2,\ 2v(u^2+v^2+1) - 2v(u^2+v^2-1) \Big)$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\Big(-4uv, 2(u^2-v^2+1), 4v \Big)$$

$$\Rightarrow F_1 = \sigma_{1u}\cdot\sigma_{1v} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\Big(-8uv(v^2-u^2+1) - 8uv(u^2-v^2+1) + 16uv \Big) = 0$$

$$E_1 = \sigma_{1u}\cdot\sigma_{1u} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\Big(4(v^2-u^2+1)^2 + 16u^2v^2 + 16u^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\Big(4\big(v^4+u^4-2v^2u^2+1+2(v^2-u^2)\big) + 16u^2v^2 + 16u^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\Big(\underbrace{4(v^4+u^4+1) + 8u^2v^2 + 8u^2 + 8v^2}_{=4(u^2+v^2+1)^2} \Big) = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}$$

symm. $u,v \Rightarrow$

$$G_1 = \sigma_{1v}\cdot\sigma_{1v} = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$\therefore\quad E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}(du^2+dv^2) =: \lambda(u,v)(du^2+dv^2)$$

□

Määritelmä. Alueen $R\subset U$ pinta-ala pintaelementillä $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ on $A_\sigma(R) = \iint_R \|\sigma_u\times\sigma_v\|\,du\,dv$.

2.4. Lause $\|\sigma_u\times\sigma_v\| = (EG-F^2)^{1/2}$

Tod: $\|\sigma_u\times\sigma_v\|^2 = \|\sigma_u\|^2\|\sigma_v\|^2 \sin^2\sphericalangle(\sigma_u,\sigma_v)$

$= \|\sigma_u\|^2\|\sigma_v\|^2(1-\cos^2\sphericalangle(\sigma_u,\sigma_v))$

$= \|\sigma_u\|^2\|\sigma_v\|^2 - (\sigma_u\cdot\sigma_v)^2 = EG-F^2$. □.

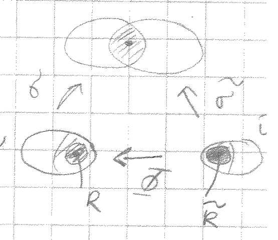
Huom $EG-F^2>0$, sillä σ sään.

Kirj. $dA_\sigma = (EG-F^2)^{1/2}\,du\,dv$ infinitesimaalinen pinta-alan muutos.

~~2.5. Lause Pinta-ala on riippumaton parametrisoinnista.~~

Tod: Ol. $\sigma : U\to\mathbb{R}^3$, $\tilde\sigma : \tilde U \to \mathbb{R}^3$ parametrisointeja s.e. $\sigma(U)\cap\tilde\sigma(\tilde U)\neq\emptyset$. Olk. $\underline{\Phi} = \sigma^{-1}\circ\tilde\sigma$, ja

$\tilde R \subset \tilde\sigma^{-1}(\sigma(U)\cap\tilde\sigma(\tilde U))$. Ks. L. II.2.1. tod $\Rightarrow$



$\tilde\sigma_{\tilde u}\times\tilde\sigma_{\tilde v} = J_{\underline\Phi}\,\sigma_u\times\sigma_v$. Merk. $R = \underline\Phi(\tilde R)$

$$\Rightarrow \iint_{\tilde R} \|\tilde\sigma_{\tilde u}\times\tilde\sigma_{\tilde v}\|\,d\tilde u\,d\tilde v = \iint_{\tilde R} |J_{\underline\Phi}|\,\|\sigma_u\times\sigma_v\|\,d\tilde u\,d\tilde v$$

$$= \iint_R \|\sigma_u\times\sigma_v\|\,du\,dv$$

muut. vaihto $(u,v) = \underline\Phi(\tilde u,\tilde v)$

□.

Määritelmä Ol. S_1, S_2 sileitä pintoja. Diffeomorfismi $f: S_1 \to S_2$ on pinta-alan säilyttävä, jos pätee

$\mathcal{A}_\sigma(R) = \mathcal{A}_{f\circ\sigma}(R)$ $\forall R \subset U$, $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ S_1:n parametrisointi.

2.6. **Lause** Diffeomorfismi $f: S_1 \to S_2$ on pinta-alan säilyttävä jos ja vain jos pätee $E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$ kun $E_1du^2 + 2F_1dudv + G_1dv^2$ on S_1:n parametrisoinnin $\sigma_1: U \to \mathbb{R}^3$ 1. perusmuoto ja $E_2du^2 + 2F_2dudv + G_2dv^2$ on S_2:n parametrisoinnin $\sigma_2 = f\circ\sigma_1: U \to \mathbb{R}^3$ 1. perusmuoto.

Tod: "$\Leftarrow$" Jos $R \subset U$, niin L.2.4: $\mathcal{A}_{\sigma_1}(R) = \iint_R (E_1G_1 - F_1^2)^{1/2}\,du\,dv$

ja $\mathcal{A}_{\sigma_2}(R) = \iint_R (E_2G_2 - F_2^2)^{1/2}\,du\,dv$ ja

$f\circ\sigma_1(R) = \sigma_2(R) \Rightarrow \mathcal{A}_{\sigma_1}(R) = \mathcal{A}_{f\circ\sigma_1}(R)$.

"$\Rightarrow$" Ol. $f: S_1 \to S_2$ pinta-alan säilyttävä $\Rightarrow \forall R \subset U$

$\mathcal{A}_{\sigma_1}(R) = \mathcal{A}_{f\circ\sigma_1}(R) \Rightarrow \iint_R (E_1G_1 - F_1^2)^{1/2}\,du\,dv = \iint_R (E_2G_2 - F_2^2)^{1/2}\,du\,dv$

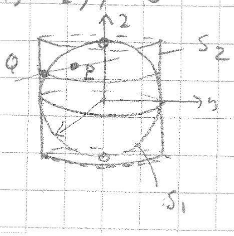
$\Rightarrow E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$ $\square$.

1° **Esim** Ol. $f: \underbrace{S^2(0,1) \setminus \{(0,0,\pm1)\}}_{=S_1} \to \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z\in(-1,1)\} =: S_2$

kuvaus, joka vie pisteen $P = (x,y,z) \in S_1$ pisteeksi

$Q = (X,Y,Z) \in S_2$, joka lähimpänä pistettä P s.e. $sp\{PQ\} \cap \{(0,0,z)\} \neq \emptyset$

ja $sp\{PQ\} \parallel xy$-taso



$\Rightarrow Z = z$, $(X,Y) = \lambda(x,y)$ jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$

$Q \in S_2 \Rightarrow 1 = X^2 + Y^2 = \lambda^2(x^2+y^2) \Rightarrow \lambda = (\pm1)(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}, z\right)$.

V: f on pinta-alan säilyttävä diffeomorfismi

Ral. S_1:n kartasto $(\sigma_1, U_1), (\sigma_1, U_2)$

$\sigma_1(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ $\quad U_1 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$

$U_2 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$

$\sigma_2(\theta,\varphi) := (f\circ\sigma_1)(\theta,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin\theta)$

$\Rightarrow (\sigma_2, U_1), (\sigma_2, U_2)$ S_2:n kartasto

aik. Esim 2° s.2.4 $\Rightarrow E_1 = 1$, $F_1 = 0$, $G_1 = \cos^2\theta$

σ_2:n 1. perusmuoto: $\sigma_{2\theta} = (0,0,\cos\theta)$, $\sigma_{2\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$E_2 = \|\sigma_{2\theta}\|^2 = \cos^2\theta$ $\quad F_2 = 0$, $G_2 = 1$

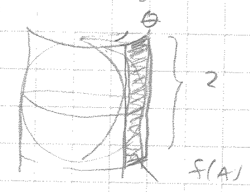
$\Rightarrow E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2 \overset{L.2.6}{\Rightarrow}$ kuvaus

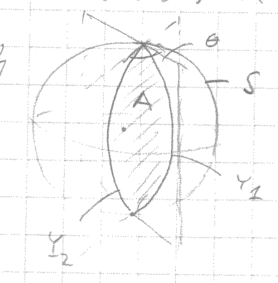
$f: S_1 \to S_2$ $\quad (\theta,\varphi) \longmapsto (\theta,\varphi)$ diffeo (!) ja pinta-alan säilyttävä.

2° **Esim** Pallon $S^2(0,1)$ kahden isoympyrän väliin jäävän alueen A pinta-ala? Voi ol. $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{(0,0,\pm1)\}$ (palloa pyörittämällä). Ol. $\measuredangle(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta$

esim 1° $\Rightarrow$ $f(A)$ =

Area$(A) = 2\theta$





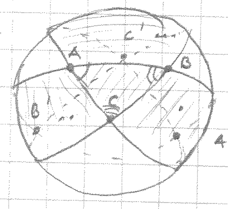
II 2.1

2.7. Lause Ol. ABC kolmio pallolla $S^2(0,1)$, jonka sivut ovat isoympyrän kaaria. Kolmion pinta-ala on

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi$$

missä $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ pisteisiin $A\ B\ C$ liittyvät kulmat.

Tod: Olk kolmen isoympyrän leikkauspisteet A, B, C ja A', B', C' (antipodaaliset pisteet) jakaa pallon pinnan 8:in kolmioon



Esim $2^\circ \Rightarrow$ $\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(BCA') = 2\sphericalangle A$

$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACB') = 2\sphericalangle B$

$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC') = 2\sphericalangle C$

Puolipallo muodostuu kolmioista ABC ABC' $A'BC$ $A'BC'$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC') + \mathcal{A}(A'BC) + \mathcal{A}(A'BC') = 2\pi$

---

antipodaalinen kuvaus $a: x \mapsto -x$, $x \in S^2(0,1)$ on isometria (ja siis säilyttää pinta-alan (HT)) $\Rightarrow$

$\mathcal{A}(A'BC') = \mathcal{A}(AB'C)$

$$\Rightarrow 2\mathcal{A}(ABC) + \underbrace{\{\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(BCA') + \mathcal{A}(ACB') + \mathcal{A}(ABC')\}}_{=2\pi}$$

$$= 2(\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(ABC) = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi. \quad \square$$