Johdatus differentiaaligeometriaan: Käyrät ja pinnat | Harj 3.
9.2.2007

Mat-1.3530 Peltonen / Perkkiö

1) Osoita, että polku $t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t}\right)$ on tasopolku

2) Olkoon c Frenét käyrä ja $\{e_1(0), e_2(0), e_3(0)\}$ sen Frenét-kehys pisteessä $c(0)$. Osoita, että polulla

$$t \mapsto c(0) + t e_1(0) + \frac{t^2}{2}\kappa(0) e_2(0) + \frac{t^3}{6}\kappa(0)\tau(0) e_3(0)$$

on sama kaarevuus ja torsio kuin polulla c pisteessä $c(0)$.

3) Olkoon sään. tasopolku annettu napakoordinaateissa (r, φ) muodossa $r = r(\varphi)$. Osoita, että välin $[\varphi_1, \varphi_2]$ kaarenpituus saadaan lausekkeesta

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r'^2 + r^2)^{1/2} d\varphi \quad \text{kun } r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

ja suunnistettu kaarevuus saadaan lausekkeesta

$$\kappa_s(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{((r')^2 + r^2)^{3/2}}.$$

4) Määrää spiraalin $r: r(\varphi) = e^{a\varphi}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ $(a \in \mathbb{R}$ vakio$)$ suunnistettu kaarevuus κ_s.

5) Olkoon sään. tasopolku parametrisoitu kompleksitasossa $z(t) = x(t) + iy(t)$. Osoita, että suunnistettu kaarevuus saadaan lausekkeesta $\kappa_s = -\frac{\mathrm{Im}\,(z'\overline{z''})}{|z'|^3}$.
Määrää tehtävän 4) spiraalin

$$z(\varphi) = e^{(a+i)\varphi} \quad (a \in \mathbb{R})$$ suunnistettu kaarevuus myös tästä.

6) Olkoon $t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$ vinosymmetrinen 3×3 matriisi l. $a_{ij} = -a_{ji}$.
Olkoot $t \mapsto v_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ sileitä vektorikenttiä s.e. pätee $v_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j$ $\forall i = 1,2,3$. Osoita, että jos $\{v_1(t_0), v_2(t_0), v_3(t_0)\}$ on ortonormaali jollakin t_0, niin $\{v_1, v_2, v_3\}$ on ortonormaali $\forall t$.
Vihje: kirjoita $F = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ja muodosta FF^T:lle 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö ehdon $F' = AF$ avulla.