

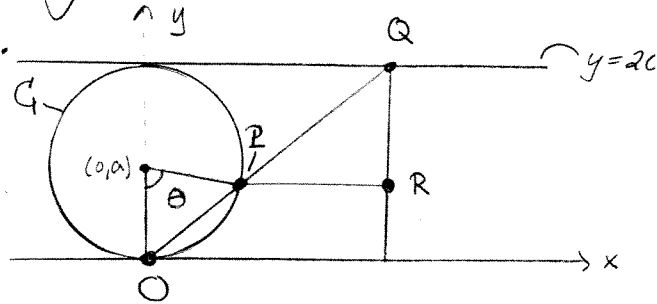
# Johdatus differentiaaligeometriaan: Käyrät ja pinnat

Harj. 1  
26.1.200

Mat - 1,3530 Feltonen/Perkkio

("Witch of Agnesi")

- 1) Olkoon  $C$   $xy$ -tason  $a$  ( $>0$ )-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on  $(0,a)$ ,  $P \in C$  ja  $Q$  piste, jossa pisteen  $P$  ja origon kautta kulkeva suora leikkaa suoran  $y=2a$ .  
Olkoon  $R$  piste, jossa  $x$ -akselin suuntainen suora, joka kulkee pisteen  $P$  kautta leikkaa  $y$ -akselin suuntaisen, pisteen  $Q$  kautta kulkevan suoran.



Määrää pisteen  $R$  rata, kun

$P$  liikkuu pitkin ympyrää  $C$

a) parametrimuodossa (polku)

b) koordinaattien  $x, y$  yhtälönä.

- 2) Sykloidin muodostuu  $a$ -säteisen ympyrän pisteen ratana, kun ympyrä pyöri (liikumata) origosta lähtien pitkin positiivista  $x$ -akselia. Osoita, että sykloidilla on parametrisointi  $c: c(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ .

- 3) Etoi episykloidin (ja hyposykloidin) parametrisointi, joka saadaan  $a$ -säteisen ympyrän pisteen ratana, kun ympyrä pyöri (liikumata) toisen  $b$ -säteisen ympyrän ulkopuolella (sisäpuolella).

- 4) Osoita, että  $c: t \mapsto (\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t)$  parametrisoit käyrän, joka saadaan  $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ -keskeisen  $1$ -säteisen pallon ja  $\frac{1}{2}$ -säteisen,  $z$ -akseli keskeisen ympyräsylinterin leikkauksen (vinanin käyrä)

- 5) Voidaan määritellä säännöllinen käyrä  $C$  kokoelmalla säännöllisiä polkuja s.e.  $\tilde{c} \in C \Leftrightarrow \exists$  sileä (= kaikkien kertalukujen derivaatat  $\exists$ ) bijektio  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  s.e.  $\gamma'(t) > 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$  ja  $\tilde{c}(t) = c(\gamma(t)) \forall t \in [\alpha, \beta]$  jollakin säännöllisellä polulla  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, c \in C$ . Osoita, että säännöllisen käyrän pituus  $l(C) = \int \|\dot{c}(t)\| dt, c \in C$  on hyvin määritelty l. riippumaton edustajan  $c \in C$  valinnasta.

- 6) Osoita edellisen tehtävän avulla, että parametrisointi kaarenpituuksien suhteen on translaatio  $s \mapsto \pm s + s_0$  vaille  $1$ -käsiäinen.