Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2, kevät 2002 **Högnäs**
Demonstraatioharjoitukset, erä 1

Tässä ensimmäinen erä ratkaisuja demonstraatiotehtäviin. (Kuvat ovat melko heikkolaatuisia ja ainoastaan "kvalitatiivisia".)

Demonstraatioharjoitus 1, pe 17.1

1. [Ad4 9.1 / 11] Tutki onko lukujono $\left\{n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$

   (a) ylhäältä tai alhaalta rajoitettu

   (b) positiivinen tai negatiivinen

   (c) kasvava, vähenevä tai alternoiva

   (d) suppeneva, hajaantuva, tai rajatta kasvava tai vähenevä.

   Ratkaisu. Jono on siis muotoa $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, missä

$$a_n = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

   Koska

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n = 4k \\ -1, & \text{jos } n = 4k+2 \\ 0, & \text{jos } n = 4k+1 \text{ tai } n = 4k+3 \end{cases},$$

   missä k on kokonaisluku, pätee

$$\left\{n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 0, -2, 0, 4, -6, 0, 8, -10, 12, -14, 16, \ldots\}$$

   (a) Olkoon $n = 4k$, missä $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $a_n = 4k\cos 2k\pi = 4k$, joten jono ei ole ylhäältä rajoitettu (kaikilla M on olemassa k siten että $4k > M$, joten on olemassa n siten että $a_n > M$).

   Jos taas $n = 4k+2$ saadaan $a_n = (4k+2)\cos(2k+1)\pi = -(4k+2)$, eli jono ei myöskään ole alhaalta rajoitettu (sillä kaikilla m on olemassa k siten että $-(4k+2) < m$, joten on olemassa n siten että $a_n < m$.

Jono ei siis ole ylhäältä eikä alhaalta rajoitettu.

(b) Näimme (a)-tapauksessa, että jonolla on sekä positiivisia että negatiivisia alkioita, joten se ei voi olla negatiivinen eikä positiivinen.

(c) Koska $a_{4k+1} = 0$, $a_{4k+2} = -(4k+2) < 0$ ja $a_{4k+3} = 0$ jono ei voi olla vähenevä eikä kasvava (edes suurilla indekseillä n).

Koska $a_{4k} = 4k > 0$, $a_{4k+1} = 0$ ja $a_{4k+2} \geq 0$ se ei myöskään ole alternoiva (edes suurilla indekseillä).

(d) Koska jono ei ole rajoitettu, se ei suppene, eli se on hajaantuva. Se ei myöskään kasva rajatta ∞:een tai $-\infty$:een, sillä mielivaltaisen isoilla indekseillä $n = 4k+1$ on $a_n = 0$.

2. [Ad4 9.1 / 30] Olkoon $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ Näytä, että jono $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Päättele, että jono suppenee ja etsi sen raja-arvo. (*Vihje:* Osoita, että $a_n \leq 3$ jokaisella n.)

   Ratkaisu. Todistetaan induktiolla, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n pätee
   (i) $a_n < a_{n+1}$
   (ii) $a_n < 3$.

   Ensinnäkin on selvä, että molemmat väitteet pätevät kun $n = 1$ ($a_1 = 1 < \sqrt{3} = a_2$).

   Induktio-oletus on nyt, että väitteet pätevät tietyllä n, ja pitää todistaa, että ne pätevät myös luvulla $n + 1$.

   (i): Pitää todistaa, että $a_{n+1} < a_{n+2}$, so. $\sqrt{1 + 2a_n} < \sqrt{1 + 2a_{n+1}}$. Mutta viimeinen epäyhtälö on tosi, sillä induktio-oletuksen mukaan $a_n < a_{n+1}$.

   (ii): Pitää todistaa, että $a_{n+1} < 3$, so. $\sqrt{1 + 2a_n} < 3$ eli toisin sanoen $1+2a_n < 9$. Mutta viimeinen epäyhtälö on varmasti tosi, sillä induktio-oletuksen mukaan $1 + 2a_k < 1 + 2 \cdot 3 = 7$.

   Olemme näin ollen todistaneet molemmat väitteet. Jono on siis kasvava ja ylhäältä rajoitettu, eli se suppenee (ja lisäksi raja-arvo ≤ 3).

   Olkoon a jonon raja-arvo. Siispä

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2a_n} = \sqrt{1 + 2a},$$

missä viimeinen yhtälö seuraa siitä, että $\sqrt{1+2x}$ on jatkuva x:n funktio. Siispä $a = \sqrt{1+2a}$, eli

$$a^2 - 2a - 1 = 0,$$

josta saamme $a = 1 \pm \sqrt{2}$. Koska jono on aidosti kasvava pätee $a > a_1 = 1$, ja voimme hylätä negatiivisen neliöjuuren. Päättelemme näin ollen, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{2}.$$

Huomautus. Koska $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava, pätee $1 \leq a_n < \sqrt{1+2a_n}$, joten $a_n^2 < 2a_n + 1$, eli $(a_n - 1)^2 < 2$. Näin ollen $1 \leq a_n < 1 + \sqrt{2}$ seuraa siitä, että jono on aidosti kasvava (ja tietenkin $1 + \sqrt{2} < 3$).

Muutama sana matemaattisesta induktiosta

Olkoon $P(n)$ joku matemaattinen väite ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Väite todistetaan matemaattisella induktiolla seuraavasti.

I. Osoitetaan ensin, että $P(0)$ on tosi.

II. Osoitetaan seuraavaksi, että kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$ pätee

jos $P(n)$ on tosi (induktio-oletus), niin on myös $P(n+1)$ tosi, ts. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Jos I ja II onnistuvat, niin väite on tosi kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tietenkin voidaan nollan sijasta aloittaa ykkösestä, eli todistetaan I:ssä, että $P(1)$ on tosi, ja II:ssa että $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ kun $n = 1, 2, 3, \ldots$, jolloin koko todistus osoittaisi, että $P(n)$ on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 4, \ldots\}$ ($\mathbb{N}$ on posiitiivisten kokonaislukujen eli nk luonnollisten lukujen joukko)

Seuraava induktiotodistuksen muunnelma on usein käyttökelpoinen.

I. Osoitetaan ensin, että $P(0)$ on tosi.

II. Osoitetaan seuraavaksi, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

jos $P(k)$ on tosi jokaisella $k < n$ (induktio-oletus), niin on myös $P(n)$ tosi.

Induktiotodistuksen pitävyys on muuten ekvivalentti seuraavan triviaalilta vaikuttavan kokonaislukujen ominaisuuden kanssa:

Jokaisella ei-tyhjällä joukolla, jonka kaikki alkiot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, on pienin alkio.

3. [Ad4 9.2 / 12] Etsi päättymättömän sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots$$

summa, jos se suppenee.

Ratkaisu. Sarjan termi $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ voidaan jakaa osamurtolukuihin asettammalla

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siispä

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A(2n+1) + B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2(A+B)n + (A-B)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Tästä seuraa, että $2(A+B)n + (B-A) = 1$ kaikilla n. Saadaan

$$\begin{cases} 2A & +2B & = & 0 \\ A & -B & = & 1 \end{cases}.$$

Tämän systeemin ratkaisu on $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, joten

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}.$$

Osasummalle s_N saadaan siis

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{2(N-1)-1} - \frac{1}{2(N-1)+1} \right) + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N+1} \right). \end{aligned}$$

Täten $\lim_{N \to \infty} s_N = \frac{1}{2}$, eli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

4. [Ad4 9.2 / 10] Kuten edellisessä tehtävässä sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$.

Ratkaisu. Pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{m} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

sekä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{m} = \frac{2}{27}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}.$$

(sillä $|\frac{1}{3}| < 1$ ja $|\frac{2}{3}| < 1$). Saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$$

(Palautetaan mieleen, että jos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, niin $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.)

5. [Ad4 9.3 / 13]Tutki, suppeneeko sarja $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$.

Ratkaisu. Funktio $f(x) = \frac{1}{x \ln x \sqrt{\ln \ln x}}$ on positiivinen, jatkuva ja (aidosti) vähenevä kun $x \geq 3$ (huomaa, että $\ln \ln x > \ln \ln e = \ln 1 = 0$ kun $x > e \approx 2,7$). Sarja hajaantuu siis ∞:een jos integraali

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x \sqrt{\ln \ln x}}\, dx$$

hajaantuu ∞:een ja suppenee jos tämä integraali suppenee. Käyttämällä substituutiota $u = \ln x$ saadaan " $du = dx/x$", jolloin

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x \sqrt{\ln \ln x}}\, dx = \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{1}{u\sqrt{\ln u}}\, du.$$

Uusi substituutio $v = \ln u$, jolloin " $dv = du/u$", antaa näin ollen

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x \sqrt{\ln \ln x}}\, dx = \int_{\ln \ln 3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}\, dv.$$

Viimeinen integraali hajaantuu (sillä $\left[\frac{1}{2}v^{1/2}\right]_{\ln\ln 3}^{L} = \frac{1}{2}L^{1/2} - \frac{1}{2}(\ln\ln 3)^{1/2} \to \infty$ kun $L \to \infty$.

Integraalitesti. Jos $a_n = f(n)$, missä f on positiivinen, jatkuva ja vähenevä (kirjassa "nonincreasing") funktio jollain välillä $[N, \infty)$ (missä N on positiivinen kokonaisluku), niin sarja $\sum_{n=1}^{infty} a_n$ ja integraali $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ joko molemmat suppenevat tai molemmat hajaantuvat ∞:een.

6. [Ad4 9.3 / 35] Osoita integraalitestin avulla, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ suppenee, ja että sen summa on pienempi kuin $\pi/2$. Osoita integraalitestin avulla, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ suppenee, ja että sen summa on pienempi kuin $\pi/2$.

   Ratkaisu. Saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

   (Piirrä kuva!)

Demonstraatioharjoitus 2, pe 25.1.02

1. [Ad4 9.4 / 5] Tutki suppeneeko sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$ itseisesti tai ehdollisesti vai hajaantuuko se.

   Ratkaisu. Lasketaan sarjan termien itseisarvojen raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|-1|^n|1-\frac{1}{n^2}|}{|1+\frac{1}{n^2}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

   Toisaalta tiedämme, että suppenevalle sarjalle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pätee $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, jolloin $\lim_{n\to\infty} |a-n| = 0$. Tehtävän sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$ ei siis suppene, eli se hajaantuu.

Huomautus. Sarja on alternoiva kun $n \geq 2$, mutta termien itseisarvot eivät suppene monotonisesti 0:aan. Toisaalta sarja termit a_n voidaan kirjoittaa

$$a_n = (-1)^n + (-1)^{n-1} \frac{2}{n^2+1}.$$

Sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n^2+1}$ suppenee äärelliseen summaan s, sillä se on alternoiva ja $\frac{2}{n^2+1}$ suppenee monotonisesti nollaan kun $n \to \infty$. Sarjan $\sum\limits_{n=0} (-1)^n$ osasummat sitävasoin ovat vuorotellen 1 ja -1. Tästä seuraa, että alkuperäsen sarjan osasummat s_{2n} konvergoivat raja-arvoon $s+1$, kun taas osasummat s_{2n+1} konvergoivat raja-arvoon $s-1$. Sarja ei siis hajaannu ∞:een tai $-\infty$:een.

2. [Ad4 12.1 / 26] Hahmottele funktion $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$ tasa-arvokäyriä.

   Ratkaisu. Toteamme ensin, että on kyse ei-negatiivisesta reaaliarvoisesta funktiosta, joka on määritelty kun $\frac{1}{y} - x^2 \geq 0$, so. kun $\frac{1}{y} \geq x^2$. Koska $x^2 \geq 0$ täytyy siis $y > 0$ ja $y \leq \frac{1}{x^2}$. Toisaalta nämä kaksi epäyhtälöä takaa, että $\frac{1}{y} - x^2 \geq 0$. Siispä $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \geq \frac{1}{x^2}\}$.

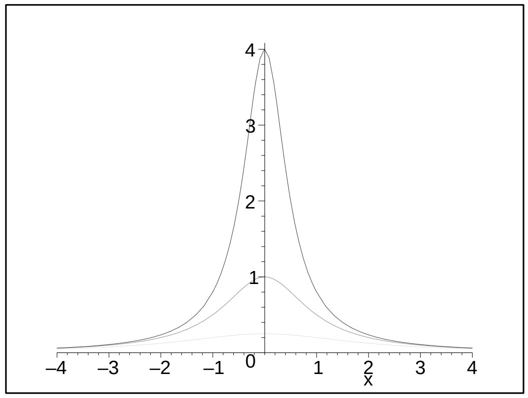
   Funktion tasa-arvokäyrien yhtälöt ovat muotoa $f(x, y) = C$, missä C on (reaaliarvoinen) vakio. Nähdään heti, että vakion C ollessa negatiivinen on $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\frac{1}{y} - x^2} = C\} = \{\ \}$, eli käyrä on tyhjä joukko. Kun $C \geq 0$ saadaan

   $$\sqrt{\frac{1}{y} - x^2} = C \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2 + C^2},$$

   eli tasa-arvokäyrän $f(x, y) = C$ yhtälö voidaan kirjoittaa

   $$y = \frac{1}{x^2 + C^2},$$

   missä $x \in \mathbb{R}$ jos $C > 0$, ja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jos $C = 0$. Alla on piirretty tasa-arvokärät C:n arvoilla 0.5, 1 ja 2.



3. [Ad4 12.2 / 3] Laske raja-arvo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$ mikäli se on olemassa. Perustele.

   Ratkaisu. Olkoon $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$. On selvä, että $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \parallel y \neq 0\}$. Tarkastellaan funktion käyttäytymistä kun $(x,y) \to (0,0)$ pitkin käyrää $y = x^3$ (onhan $\lim_{x\to 0} x^3 = 0!$). Pätee

$$f(x,x^3) = \frac{1}{x} + x^3 \to \begin{cases} \infty, & \text{if } x \to 0+ \\ -\infty, & \text{if } x \to 0- \end{cases}.$$

   Kysytty raja-arvo ei siis ole olemassa.

4. [Ad4 12.2 / 14] Tarkastellaan funktiota $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}$ $(x \neq y)$. Määrittele funktion arvot viivalla $x = y$, s.e. funktiosta tulee jatkuva $\mathbb{R}^2$:ssa.

   Ratkaisu. Ilmeisesti $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \parallel x \neq y\}$. Koska sekä osoittajan että nimittäjän polynomilla on nollakohta kun $x = y$, voidaan suorittaa jakolasku (tee se!), ja tulos on polynomi,

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + xy + y^2 \qquad (x \neq y).$$

   Tästä seuraa, että

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^3-y^3}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 + xy + y^2 = a^2 + ab + b^2.$$

   Jos siis määritellään $f(x,x) = 3x^2$, tulee f jatkuvaksi kaikkialla tasossa $\mathbb{R}^2$, ja $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Muistathan jatkuvuuden määritelmän: Funktio on jatkuva pisteessä $\mathbf{a}$ jos f on määritelty $\mathbf{a}$:n ympäristössä ja $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} = f(\mathbf{a})$.

Huomautus. On selvä, että raja-arvon määritelmän vaatimus, että jokainen pisteen (a,b) ympäristö sisältää $\mathcal{D}(f)$:n pisteitä, toteutuu.

5. [Ad4 12.3 / 4] Määrää funktion $g(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$ (ensimmäisen kertaluvun) osittaisderivaatat, ja laske niiden arvot pisteessä $(1,1,1)$.

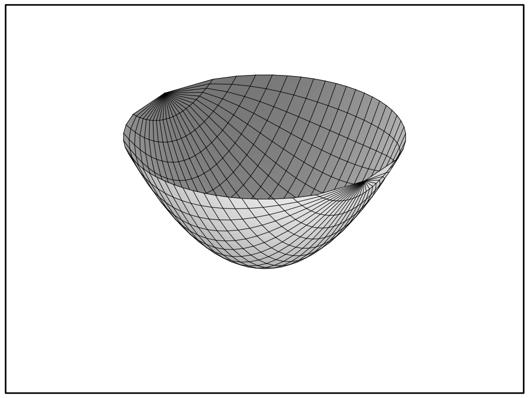
   Ratkaisu. Lasketaan esim. seuraavalla tavalla

$$
\begin{aligned}
g_1(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{xy}{y+z}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{y}{y+z}x\right\} = \frac{y}{y+z},\\
g_2(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{xy}{y+z}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{xy(y+z)^{-1}\right\}\\
&= xz\cdot(-1)(y+y)^{-2}\frac{\partial}{\partial y}(y+z) = -xz(y+z)^{-2}\cdot 1\\
&= \frac{-xz}{(y+z)^2},\\
g_3(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{xy}{y+z}\right\} = \frac{(y+z)\frac{\partial}{\partial z}(xz) - xz\frac{\partial}{\partial z}(y+z)}{(y+z)^2}\\
&= \frac{x(y+z)-xz}{(y+z)^2} = \frac{xy}{(y+z)^2}.
\end{aligned}
$$

   (Osittaisderivaatathan lasketaan derivoimalla kyseisen muuttujan suhteen niin että muut muuttujat pidetään vakioina.) Saadaan siis

$$
\begin{aligned}
g_1(1,1,1) &= \frac{1}{1+1}\\
g_2(1,1,1) &= \frac{-1\cdot 1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}\\
g_3(1,1,1) &= \frac{1\cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

6. [Ad4 12.3 / 34] Laske pisteen $(1,1,0)$ etäisyys pyörähdysparaboloidista, jonka yhtälö on $z = x^2 + y^2$.



Kuva: Pyörähdysparaboloidi

Ratkaisu. Olkoon $P = (1, 1, 0)$, ja olkoon $Q = (X, Y, Z)$ lähin piste kyseisellä paraboloidilla (jolloin $Z = X^2 + Y^2$). Silloin jana $\overrightarrow{PQ}$ on kohtisuora paraboloidia vastaan pisteessä Q, eli $\overrightarrow{PQ} = (X - 1)\mathbf{i} + (Y - 1)\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ on saman- tai vastakkaissuuntainen paraboloidin normaalivektorin $\mathbf{n}$ kanssa pisteessä Q. Toisin sanoen $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{n}$. Paraboloidin normaalivektoriksi pisteessä (X, Y, Z) voimme ottaa

$$\mathbf{n} = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}\Big|_{(x,y,z)=(X,Y,Z)} = 2X\mathbf{i} + 2Y\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Siispä $t(2X\mathbf{i} + 2Y\mathbf{j} - \mathbf{k}) = (X - 1)\mathbf{i} + (Y - 1)\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, eli komponenteittain

$$\begin{cases} X - 1 = 2tX \\ Y - 1 = 2tY \\ Z = -t \end{cases}.$$

Laskemalla ensimmäisen ja toisen yhtälön erotus, saamme $X - Y = 2t(X - Y)$, eli

$$(1 - 2t)(X - Y) = 0.$$

Tästä seuraa, että $X = Y$ tai $t = \frac{1}{2}$. Toinen vaihtoehto ei kuitenkaan ole mahdollinen, sillä silloin $Z = -t = -\frac{1}{2} < 0$, ja toisaalta $Z = X^2 + Y^2 \geq 0$. Siispä $X = Y$ ja $t = -Z = -2X^2$, jolloin $X - 1 = -2(X^2 + X^2)X = -4X^3$, eli

$$4X^3 + X - 1 = 0.$$

Kokeilemalla nähdään, että $X = \frac{1}{2}$ on yksi ratkaisu. Sitten suoritetaan jakolasku $\frac{4X^3 + X - 1}{X - \frac{1}{2}}$. Tulos on $4X^2 + 2X + 2$. Tällä toisen asteen polynomilla ei ole reaalisia nollakohtia (totea), joten olemme löytäneet yksikäsitteisen ratkaisun $X = \frac{1}{2}$, $Y = X = \frac{1}{2}$, $Z = X^2 + Y^2 = \frac{1}{2}$, eli etsitty piste on $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Täten $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$. Pisteen $(1, 1, 0)$ ja paraboloidin $z = x^2 + y^2$ välimatka on siis

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Demonstraatioharjoitus 3, pe 1.2.02

1. [Ad4 12.5 / 14] Olkoon sähkökentän voimakkuus E paikan (x, y, z) ja ajan t funktio, $E = f(x, y, z, t)$. Etsi sähkökentän voimakkuuden muutosnopeus ajan suhteen kun mittalaite liikkuu avaruudessa pitkin (ympyrä)ruuvikierrettä $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t$. (Funktio f oletetaan kaikkialla differentioituvaksi.)

   Ratkaisu. Hetkellä t on mittalaite siis pisteessä $(x(t), y(t), z(t))$, missä

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \\ z = t \end{cases},$$

   jolloin se mittaa sähkökentän voimakkuudeksi

$$g(t) = f(x(t), y(t), z(t), t) = f(\sin t, \cos t, t, t).$$

   Mittalaitteen mittaaman kentän voimakkuuden muutosnopeus on siis $g'(t) = \frac{dg}{dt}$. Tämä lasketaan ketjusäännön avulla. Selkeyden takia kirjoitetaan nyt $f = f(x, y, z, s)$, missä $s = s(t) = t$. Ketjusääntö voidaan nyt kirjoittaa

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t), s(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{ds}{dt},$$

   mikä tarkoittaa

$$\begin{aligned} g'(t) = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t), s(t)) &= f_1(x(t), y(t), z(t), s(t))x'(t) \\ &\quad + f_2(x(t), y(t), z(t), s(t))y'(t) \\ &\quad + f_3(x(t), y(t), z(t), s(t))z'(t) \\ &\quad + f_4(x(t), y(t), z(t), s(t))s'(t). \end{aligned}$$

Nyt $x'(t) = \cos t$, $y'(t) = -\sin t$, $z'(t) = 1$ ja $s'(t) = 1$, jolloin siis

$$\begin{aligned} g'(t) = {} & f_1(\sin t, \cos t, t, t)\cos t - f_2(\sin t, \cos t, t, t)\sin t \\ & + f_3(\sin t, \cos t, t, t) + f_4(\sin t, \cos t, t, t). \end{aligned}$$

2. [Ad4 12.5 / 19] Lausu $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(y^2, xy, -x^2)$ funktion f osittaisderivaattojen avulla, kun nämä oletetaan jatkuviksi.

   Ratkaisu. Sovelletaan ketjusääntöä. Merkitään $f = f(u, v, w)$, $u = u(x, y) = y^2$, $v = v(x, y) = xy$, $w = w(x, y) = -x^2$. Silloin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(y^2, xy, -x^2) &= \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\ &= f_1(y^2, xy, -x^2)\frac{\partial}{\partial x}(y^2) + f_2(y^2, xy, -x^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ &\quad + f_3(y^2, xy, -x^2)\frac{\partial}{\partial x}(-x^2) \\ &= y f_2(y^2, xy, -x^2) - 2x f_3(y^2, xy, -x^2). \end{aligned}$$

   Derivoimalla viimeinen lauseke y:n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(y^2, xy, -x^2) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y f_2(y^2, xy, -x^2) - 2x f_3(y^2, xy, -x^2)\right) \\ &= f_2(y^2, xy, -x^2) + y\frac{\partial}{\partial y} f_2(y^2, xy, -x^2) \\ &\quad - 2x\frac{\partial}{\partial y} f_3(y^2, xy, -x^2). \end{aligned}$$

   Derivaatat $\frac{\partial}{\partial y} f_2(y^2, xy, -x^2)$ ja $\frac{\partial}{\partial y} f_3(y^2, xy, -x^2)$ lasketaan ketjusäännön avulla

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f_i(y^2, xy, -x^2) &= \frac{\partial}{\partial y} f_i(u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\ &= f_{i1}(y^2, xy, -x^2)\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + f_{i2}(y^2, xy, -x^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ &\quad + f_{i3}(y^2, xy, -x^2)\frac{\partial}{\partial y}(-x^2) \\ &= 2y f_{i1}(y^2, xy, -x^2) + x f_{i2}(y^2, xy, -x^2) \qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Sijoittamalla edelliseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(y^2, xy, -x^2) &= f_2(y^2, xy, -x^2) \\
&\qquad + y(2y f_{21}(y^2, xy, -x^2) + x f_{22}(y^2, xy, -x^2)) \\
&\qquad - 2x(2y f_{31}(y^2, xy, -x^2) + x f_{32}(y^2, xy, -x^2)) \\
&= f_2(y^2, xy, -x^2) \\
&\qquad + 2y^2 f_{12}(y^2, xy, -x^2) - 4xy f_{13}(y^2, xy, -x^2) \\
&\qquad + xy f_{22}(y^2, xy, -x^2) - 2x^2 f_{23}(y^2, xy, -x^2),
\end{aligned}$$

missä ollaan huomioitu, että $f_{ij} = f_{ji}$. (Olisi tietysti ollut yhtä korrektia säilyttää alkuperäiset f_{21}, f_{31} ja f_{32} lopullisessa vastauksessa.)

3. [Ad4 12.6 / 4] Etsi sopivaa linearisointia käyttäen likiarvo funktiolle $f(x, y) = \frac{24}{x^2+xy+y^2}$ pisteessä $(2.1, 1.8)$.

Linearisointi pisteessä (a, b) tarkoittaa, että etsitään pinnan $z = f(x, y)$ tangenttitaso (a, b):ssä, ja korvataan $f(x, y)$ tämän tangenttitason z-koordinaatilla. Siis

$$f(x, y) \approx L(x, y) := f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Nyt $(x, y) = (2.1, 1.8)$, joten on luonnollista valita $(a, b) = (2, 2)$, piste joka on lähellä $(2.1, 1.8)$, ja jossa $f(a, b)$, $f_1(a, b)$ ja $f_2(a, b)$ on helppo laskea.

Lasketaan tarvittavat osittaisderivaatat.

$$f_1(x, y) = -24(x^2 + xy + y^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y) = \frac{-24(2x + y)}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

ja symmetriaa hyväksi käyttäen $(f(x, y) = f(y, x))$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(y, x) = f_1(y, x) = -\frac{-24(x + 2y)}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned}
f(2, 2) &= \frac{24}{2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2} = \frac{24}{12} = 2 \\
f_1(2, 2) &= \frac{-24(2 \cdot 2 + 2)}{(2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2)^2} = \frac{-144}{144} = -1 \\
f_2(2, 2) &= f_1(2, 2) = -1.
\end{aligned}$$

4. [Ad4 12.6 / 14] Määrää muunnoksen $\mathbf{f}(r,\theta) = (x,y)$ Jacobin matriisi, missä $x = r\cos\theta$ ja $y = r\sin\theta$. (Vaikka (r,θ) voidaan katsoa *napakoordinaateiksi*, ne ovat myös karteesisia koordinaatteja omassa (r,θ)-tasossaan.)

   Ratkaisu. Voidaan kirjoittaaa $\mathbf{f}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Funktio f kuvaa siis pisteen napakoordinaatit pisteen karteesisille koordinaateille. Huomaa kuitenkin, että pari (r,θ) on myös tavallinen karteesinen koordinaattipari.

   Jacobin matriisin määritelmästä saadaan suoraan

$$D\mathbf{f}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

5. [Ad4 12.7 / 12] Laske funktion $f(x,y) = \frac{x}{1+y}$ kasvunopeus pisteessä $(0,0)$ vektorin $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ suuntaan.

   Ratkaisu. Pitää siis määrätä funktion $f(x,y) = \frac{x}{1+y}$ suuntaderivaatta vektorin $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ suuntaan. Vastaava yksikkövektori on $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$. Suuntaderivaatta suuntaan $\mathbf{u}$ on

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(x,y).$$

   Nyt

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \frac{1}{1+y}\mathbf{i} + \frac{-x}{(1+y)^2}\mathbf{j}$$

   joten

$$\nabla f(0,0) = \mathbf{i}$$

   ja

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \bullet \mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \bullet \mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6. [Ad4 12.7 / 17] Missä suunnissa funktion $f(x,y) = xy$ kasvunopeus pisteessä $(2,0)$ on -1. Onko olemassa suuntia jossa se on -3? Entä -2?

   Ratkaisu. Saadaan $\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ ja $\nabla f(2,0) = 2\,\mathbf{j}$, joten sen derivaatta pisteessä $(2,0)$ yksikkövektorin $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$ sunnassa on

$$D_{\mathbf{u}}f(2,0) = (u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}) \bullet 2\,\mathbf{j} = 2u_2.$$

Siispä $D_{\mathbf{u}}f(2,0) = -1$ jos ja vain jos $u_2 = -1/2$. Koska $\mathbf{u}$ on yksikkövektori, jolloin $|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2$, tämä on mahdollista silloin kun $u_1 = \sqrt{1-(-1/2)^2} = \pm\sqrt{3}/2$. Funktion $f(x,y) = \frac{x}{1+y}$ suuntaderivaatta pisteessä $(2,0)$ on siis -1 suunnissa $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}\,\mathbf{j}$.

On selvä, että $-1 \leq u_2 \leq 1$, joten $-2 \leq D_{\mathbf{u}}f(2,0) = 2u_2 \leq 2$. Suuntaderivaatta ei siis voi olla -3. Se on -2 kun $u_2 = -2/2 = -1$, jolloin $u_1 = \pm\sqrt{1-(-1)^2} = 0$. Vastaava suunta on siis $-\mathbf{j}$.

Vaihtoehtoinen menetelmä loppuosalle. Meillä on

$$D_{\mathbf{u}}f(2,0) = \mathbf{u} \bullet 2\,\mathbf{j} = |\mathbf{u}||\nabla f(2,0)|\cos\theta = 2\cos\theta$$

missä θ on $\mathbf{u}$:n ja $\nabla f(2,0) = 2\,\mathbf{j}$:n välinen kulma. Siispä $-2 \leq D_{\mathbf{u}}f(2,0) \leq 2$. Suuntaderivaatta pisteessä $(2,0)$ ei siis voi olla -3. Se on -2 kun $\cos\theta = -2/2 = -1$, eli kun $\theta = \pi\ (+2n\pi)$. Tämä tapahtuu siis jos $\mathbf{u}$ ja $\nabla f(2,0) = 2\,\mathbf{j}$ välinen kulma on π, eli $180°$, siis kun $\mathbf{u}$ on vastakkaissuuntainen $\nabla f(2,0)$:n kanssa.

Demonstraatioharjoitus 4, pe 8.2.02

Tämä dokumentti on vielä kesken, mutta varsinkin kahden viimeisen tehtävän ratkaisuista voisi olla hyötyä viikon 7 kotitehtäviä laskettaessa.

1. [Ad4 12.8 / 1-2] Laske a) $\frac{dx}{dy}$ kun $xy^3 + x^4y = 2$ ja b) $\frac{\partial x}{\partial y}$ kun $xy^3 = y - z$. Millä muuttujien arvoilla kyseiset ratkaisut $x = x(y)$ ja $x = x(y,z)$ ovat olemassa?

   Ratkaisu. a) Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $F(x,y) = 0$, missä $F(x,y) = xy^3 + x^4y - 2$. Tämän funktion osittaisderivaatat ovat jatkuvia, joten jos $F(x_0,y_0)$ ja $F_1(x_0,y_0) \neq 0$, niin $x = x(y)$ ratkeaa yhtälöstä pisteen (x_0,y_0) ympäristössä, ja sen derivaatta on jatkuva. Se voidaan laskea derivoimalla $F(x(y),y) = 0$ (implisiittisesti). Saadaan $F_1(x,y)\frac{dx}{dy} + F_2(x,y) = 0$, josta $\frac{dx}{dy} = -\frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}$. Nyt $F_1(x,y) = y^3 + 4x^3y$ ja $F_2(x,y) = 3xy^2 + x^4$, joten

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{3xy^2 + x^4}{y^3 + 4x^3y}.$$

Ehto $F_1(x_0, y_0) \neq 0$ voidaan kirjoittaa $y_0^3 + 4x_0^3 y_0 \neq 0$, eli $y_0 \neq 0$ ja $y_0^2 \neq -4x_0^3$. Jos siis yhtälö $F(x_0, y_0) = 0$ pätee ja edellä mainittu ehto toteutuu, niin x voidaan ratkaista y:n funktiona tämän pisteen ympäristössä, ratkaisu on jatkuvasti derivoituva, ja se vodaan laskea yllä annetulla kaavalla.

(Ehdon $F_1(x_0, y_0) \neq 0$ geometrinen tulkinta on, ettei F:n tasa-arvokäyrän normaali ole y-akselin suuntainen, siis ettei tasa-arvokäyrän tangentti ole x-akselin suuntainen.)

Huomautus. Haluaisimme tietää, millä y:n arvoilla yhtälö $F(x, y) = 0$ on ratkaisu x. Jos $y = 0$ on selvä, että $F(x, y) = -2 \neq 0$, eli ratkaisua x ei ole. Olkoon siis $y_0 \neq 0$. Silloin $F(x, y_0) = 0$ jos ja vain jos $g(x) := x^4 + xy_0^2 - \frac{2}{y_0} = 0$. On selvä, että $g(x) \to \infty$ kun $x \to \pm\infty$. Siispä g:llä on minimi jollain x_1 jossa $g'(x_1) = 0$. Funktiolla g on siis nollakohta täsmälleen silloin kun tämä minimin on ≤ 0. Mutta $g'(x) = 4x^3 + y_0^2 = 0$ täsmälleen silloin kun $x = x_1 = -\left(\frac{y_0}{2}\right)^{2/3}$. Minimi saavutetaan siis tällä x:n arvolla, ja minimi on $g(x_1) = -3\left(\frac{y_0}{2}\right)^{8/3} - \frac{2}{y_0}$. Nähdään, että $g(x_1) \leq 0$, täsmälleen silloin kun $y_0 > 0$ tai $-3\left(\frac{y_0}{2}\right)^{8/3} \frac{y_0}{2} - 1 \geq 0$ ja $y_0 < 0$, eli toisin sanoen kun $y_0 > 0$ tai $y_0 \leq -\frac{2}{3^{3/11}}$. Jos tämä ehto on voimassa löytyy siis x_0 jossa $F(x_0, y_0) = 0$.

Yllä saatu lisäehto $y_0^3 + 4x_0^3 y_0 \neq 0$ tarkoittaa siis, että $x_0 \neq x_1$, jolloin $g(x_1) \neq 0$. Tästä lisävaatimuksesta seuraa, siis, että derivoituva ratkaisu $x = x(y)$ yhtälölle $F(x, y) = 0$ on olemassa pisteen $y = y_0$ ympäristössä jos $y_>0$ tai $y_0 < -\frac{2}{3^{3/11}}$.

b) Koska yhtälössä $xy^3 = y - z$ on kolme muuttujaa, päätellään, että, ainakin tietyissä tapauksissa, pitäisi olla mahdollista ratkaista yksi näistä funktiona kahdesta muusta muuttujasta. Tässä pyydetään laskemaan $\frac{\partial x}{\partial y}$, eli tarkastellaan ratkaisua $x = x(y, z)$.

Vaihtoehto 1. Huomataan, että jos $y \neq 0$ voidaan yhtälö kirjoittaa muotoon $x = \frac{1}{y^2} - \frac{z}{y^3}$, jolla on jatkuvat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat kun $y \neq 0$. Saadaan $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{2}{y^3} + \frac{3z}{y^4}$.

Kun $y = 0$ löytyy ratkaisuja vain jos $z = 0$, jolloin kaikki x:t kelpaavat. Mutta pisteen $(y, z) = (0, 0)$ ympäristöstä löytyy pisteitä $(0, z)$ joissa $z \neq 0$, ja joissa tarkasteltu yhtälö ei siis ratkea millään x. Ratkaisu $x = x(y, z)$ on siis olemassa pisteen (y_0, z_0) ympäristössä täsmälleen silloin kun $y_0 \neq 0$, ja silloin sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

Vaihtoehto 2. Sovelletaan nyt kirjan/luentojen teoriaa. Olkoon $F(x, y, z) = xy^3 - y + z$. Yhtälö josta ratkaistaan $x = x(y, z)$ on siis $F(x, y, z) = 0$. Jos siis $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ja $F_1(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, niin pisteen (y_0, z_0) ympäristössä on funktio $x = x(y, z)$ jolla $F(x(y, z), y, z) = 0$, $x_0 = x(y_0, z_0)$. Tämän funktion osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

Derivaatta $\frac{\partial x}{\partial y}$ voidaan laskea derivoimalla yhtälö $F(x(y, z), y, z) = 0$ implisiittisesti. Saadaan $F_1(x, y, z)\frac{\partial x}{\partial y} + F_2(x, y, z)$, eli

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_2(x, y, z)}{F_1(x, y, z)} = \frac{1 - 3xy^2}{y^3}.$$

Jos tähän sijoitetaan $x = \frac{1}{y^2} - \frac{z}{y^3}$, nähdään, että tulos on sama kuin ensimmäisessä ratkaisuvaihtoehdossa. Ehto $F_1(x, y, z) \neq 0$ tarkoittaa, että $y^3 \neq 0$ so. $y \neq 0$, mikä on sekin sama kuin ensimmäisessä ratkaisussa. Geometrinen tulkinta tästä ehdosta on, että F:n tasa-arvopinnan normaalivektori ei ole yz-tasossa, eli tasa-arvopinnalla ei ole x-akselin suuntaista tangenttia. (Katso kirjaa jos et ymmärrä miksi meillä on tällainen ehto.)

2. [Ad4 12.8 / 17] Osoita, että x, y ja z voidaan ratkaista u:n ja v:n funktioina yhtälöistä

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3 z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

lähellä pistettä P_0, jossa $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Laske $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ pisteessä $(u, v) = (1, 1)$.

Ratkaisu. Ensinnäkin todetaan, että muuttujia on viisi ja yhtälöitä kolme, joten 3 muuttujaa voidaan ratkaista $5 - 3 = 2$ funktiona, edellyttäen, että tietyt ehdot toteutuvat. Tässä valitaan u ja v riippumattomiksi muuttujiksi, ja osoitetaan, että löytyy $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ja $z = z(u, v)$ se. yhtälöt toteutuvat pisteen $(u, v) = (1, 1)$ ympäristössä.

Määritellään

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) := xy^2 + zu + v^2 - 3 \\ G(x, y, z, u, v) := x^3 z + 2y - uv - 2 \\ H(x, y, z, u, v) := xu + yv - xyz - 1 \end{cases},$$

jolloin yhtälösysteemi voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v)=0 \\ G(x,y,z,u,v)=0 \\ H(x,y,z,u,v)=0 \end{cases}.$$

Ensinnäkin on helppo todeta, että P_0 on yhtälösysteemin ratkaisu, so. $F(P_0)=G(P_0)=H(P_0)=0$. Toiseksi F:n G:n ja H:n osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Lasketaan nyt

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy & u \\ 3x^2z & 2 & x^3 \\ u-yz & v-xz & -xy \end{vmatrix}.$$

Siispä

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}\right|_{P_0} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(1\cdot 2 - 3\cdot 2) = 4 \neq 0 \end{aligned}$$

Implisiittifunktiolauseen mukaan löytyy siis kolme funktiota $x(u,v)$, $y(u,v)$ ja $z(u,v)$ joilla

$$\begin{cases} F(x(u,v),y(u,v),z(u,v),u,v)=0 \\ G(x(u,v),y(u,v),z(u,v),u,v)=0 \\ H(x(u,v),y(u,v),z(u,v),u,v)=0 \end{cases}$$

pisteen $(u,u)=(1,1)$ ympäristössä. Näiden funktioiden osittaisderivaatat u:n ja v:n suhteen ovat jatkuvia.

Lasketaan vielä $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ pisteessä $(u,v)=(1,1)$. Käytetään kaavaa

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}.$$

Nimittäjän olemme jo laskeneet. Osoittajalle saadaan

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 & z & u \\ 3x^2z & -v & x^3 \\ u-yz & x & -xy \end{vmatrix},$$

josta

$$
\left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= 2 + 4 = 6.
$$

Siispä

$$
\left.\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v\right|_{(u,v)=(1,1)} = -\frac{3}{2}.
$$

3. [Ad4 12.8 / 19] Etsi dx/dy, kun $F(x,y,z,w) = 0$, $G(x,y,z,w) = 0$ ja $H(x,y,z,w) = 0$.

   Ratkaisu. Nyt on neljä muuttujaa, ja kolme yhtälöä, joten tietyllä y:n arvolla saadaan systeemi jossa on kolme yhtälöä ja kolme muuttujaa x, z, w, joten ainakin tietyillä ehdoilla voidaan ratkaista nämä kolme muuttujaa. Toisin sanoen saadaan nämä määrättyä y:n funktiona.

   Jos annetut kolme yhtälöä toteutuvat pisteessä (x_0, y_0, z_0, w_0), F:llä, G:llä ja H:lla on jatkuvat osittaisderivaatat tämän pisteen ympäristössä ja

$$
\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,z,w)} \neq 0,
$$

   niin löytyy $x = x(y)$, $z = z(y)$ ja $w = w(y)$ se. että yhtälöt $F = 0$, $G = 0$ ja $H = 0$ toteutuvat kun $(x,y,z,w) = (x(y), y, z(y), w(y))$ pisteen y_0 ympäristössä. Funktiot $x(y)$, $z(y)$ ja $w(y)$ ovat jatkuvasti derivoituvia tässä ympäristössä. Lisäksi $\frac{dx}{dy}$ voidaan laskea seuraavan kaavan avulla.

$$
\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,z,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,z,w)}},
$$

   (Funktioiden $z(y)$ ja $w(y)$ derivaatat lasketaan analogisilla kaavoilla. Muista, että nimittäjän Jacobin determinantissa derivoidaan ratkaistavien muuttujien x, z ja w suhteen, kun taas osoittajassa derivoitava muuttuja x korvataan muuttujalla y jonka suhteen derivoidaan.)

4. [Ad4 12.9 / 5] Laske funktion $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ Taylorin kehitelmä pisteen $(0,0)$ ympäristössä.

   Ratkaisu. Tässä ei ole käytännöllistä käyttää kaavaa

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(0,0) x^j y^{m-j},$$

   sillä derivaattojen yleisen lausekkeen löytäminen on vaivalloista. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+y^2}) = 2xe^{x^2+y^2}, \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{x^2+y^2}) = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

   Seuraava menetelmä on yksinkertaisempi: Kirjoitetaan $t = x^2 + y^2$, jolloin

$$e^{x^2+y^2} = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n.$$

   Nyt

$$t^n = (x^2+y^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^k (y^2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k} y^{2n-2k},$$

   joten saadaan

$$e^{x^2+y^2} = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k} y^{2n-2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^{2k} y^{2n-2k},$$

   sillä $\frac{1}{n!}\binom{n}{k} = \frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!(n-k)!}$.

5. [Ad4 12.9 / 12] Laske funktion $f(x,y) = \frac{1+x}{1+x^2+y^4}$ Taylorin polynomi astetta 2 pisteen $(0,0)$ ympäristössä.

   Ratkaisu. Funktion f Taylorin polynomi astetta n pisteen $(0,0)$ ympäristössä on

$$P_n(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(0,0) x^j y^{m-j}$$

missä $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ and $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$. Kun $n = 2$ saadaan

$$\begin{aligned}P_2(x,y) = f(0,0) + D_1 f(0,0)x + D_2(0,0)y + \frac{1}{2}D_1^2 f(0,0)x^2 \\ + D_1D_2 f(0,0)xy + \frac{1}{2}D_2^2 f(0,0)y^2.\end{aligned}$$

Ensinnäkin $f(0,0) = \frac{1+0}{1+0^2+0^4} = 1$. Lasketaan derivaatat.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \cdot (1+x^2+y^4) - 2x(1+x)}{(1+x^2+y^4)^2} = \frac{1-2x-x^2+y^4}{(1+x^2+y^4)^2}$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4(1+x)y^3}{(1+x^2+y^4)^2},$$

joten $D_1 f(0,0) = 1$ ja $D_2 f(0,0) = 0$. Lasketaan edelleen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-2x-x^2+y^4}{(1+x^2+y^4)^2}\right) \\ &= \frac{(-2-2x)(1+x^2+y^4)^2 - 2x(1+x^2+y^4)(1-2x-x^2+y^4)}{(1+x^2+y^4)^4} \\ &= \frac{-2-4x+2x^2-2y^4-4xy^4}{(1+x^2+y^4)^3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-4(1+x)y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\right) \\ &= \frac{(-4y^3)(1+x^2+y^4)^2 - 2x(1+x^2+y^4)(-4(1+x)y^3)}{(1+x^2+y^4)^4} \\ &= \frac{4y^3(-1+2x+x^2-y^4)}{(1+x^2+y^4)^3}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-4(1+x)y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\right) \\ &= \frac{-12(1+x)y^2(1+x^2+y^4)^2 - 4y^3(1+x^2+y^4)(-4(1+x)y^3)}{(1+x^2+y^4)^4} \\ &= \frac{4(1+x)y^2(-3-3x^2+4y^4)}{(1+x^2+y^4)^3},\end{aligned}$$

josta $D_1^2 f(0,0) = -2$, $D_1 D_2 f(0,0) = D_2^2 f(0,0) = 0$. Siispä

$$P_2(x,y) = 1 + x - x^2.$$

Vaihtoehtoinen menetelmä. Voidaan laskea

$$f(x,y) = (1+x)\frac{1}{1-(-(x^2+y^4))} = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-(x^2+y^4))^n.$$

Tässä $(-(x^2+y^4))^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}(x^2)^k(y^4)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} x^{2k}y^{4n-4k}$, joten saadaan

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+x)\sum_{k=0}^{n} x^{2k}y^{4n-4k}.$$

Kun tästä kerätään termit astetta ≤ 2, saadaan taas $P_2(x,y) = 1+x-x^2$.

6. [Ad4 12.9 / 14] Osoita, että yhtälöllä $\sqrt{1+xy} = 1 + x + \ln(1+y)$ on ratkaisu muotoa $y = f(x)$ pisteen $x = 0$ ympäristössä, missä $f(0) = 0$. Määrää funktion f Maclaurinin sarjan ensimmäiset kolme nollasta poikkeavaa termiä.

   Ratkaisu. Määritellään

   $$F(x,y) := \sqrt{1+xy} - 1 - x - \ln(1+y).$$

   Annettu yhtälö voidaan siis kirjoittaa $F(x,y) = 0$. Nähdään heti, että $F(0,0) = 0$. Todetaan myös, että F:llä on jatkuvat osittaisderivaatat kun $y > -1$ ja $xy > -1$, eli erityisesti jossain pisteen $(0,0)$ ympäristössä. Lisäksi huomataan, että $F_2(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{1+xy}} - \frac{1}{1+y}$ ja $F_2(0,0) = -1 \neq 0$. Siten $y = f(x)$ voidaan ratkaista ehdosta $F(x,y) = 0$ pisteen $(0,0)$ ympäristössä, se. $f(0) = 0$ ja f on jatkuvasti derivoituva.

   Saadaan

   $$f'(x) = -F_1(x,f(x))/F_2(x,f(x)).$$

   Koska F:n osittaisderivaatat ovat olemassa pisteen $(0,0)$ ympäristössä nähdään helposti, että f' voidaan derivoida, ja f'' voidaan kirjoittaa F:n osittaisderivaattojen avulla. Jatkamalla näin, nähdään, että

f:llä on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteen $x = 0$ ympäristössä. Voidaan siis muodostaa tämän funktion Maclaurinin sarja (so. Taylorin kehitelmä pisteessä $x = 0$), ja sarjan summa on itse funktio pisteen $x = 0$ ympäristössä. Koska $f(0) = 0$, on siis olemassa vakioita $a_1, a_2, \ldots$, siten että

$$y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

kaikille x jossain pisteen $x = 0$ ympäristössä. Sijoitetaan tämä sarja y:n paikalle yhtälöön $\sqrt{1+xy} = 1 + x + \ln(1+y)$ ja käytetään hyväksi seuraavia standardikehitelmiä

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+t} &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2\cdot 4}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}t^3 - \ldots \\
\ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots
\end{aligned}$$

jotka pätevät tarpeeksi pienillä argumenteilla t. Saadaan siis

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+xy} &= 1 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}(xy)^2 + \ldots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) \\
&\qquad - \frac{1}{8}x^4(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)^2 + \ldots \\
&= 1 + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{2}x^3 + (\frac{a_3}{2} - \frac{a_1^2}{8})x^4 + \ldots
\end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned}
1+x+\ln(1+y) &= 1+x+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots \\
&\quad -\frac{1}{2}x^2(a_1+a_2x+a_3x^2+\dots)^2+\frac{1}{3}x^3(a_1+a_2x+\dots)^3 \\
&\quad -\frac{1}{4}x^4(a_1+a_2x+\dots)^4+\dots \\
&= 1+(a_1+1)x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 \\
&\quad -\frac{1}{2}x^2(a_1^2+2a_1a_2x+(a_2^2+2a_1a_3)x^2+\dots) \\
&\quad +\frac{1}{3}x^3(a_1^3+3a_1^2a_2x+\dots)-\frac{1}{4}x^4(a_1^4+\dots)+\dots \\
&= 1+(a_1+1)x+(a_2-\frac{a_1^2}{2})x^2+(a_3-a_1a_2+\frac{a_1^3}{3})x^3 \\
&\quad +(a_4-\frac{1}{2}a_2^2+a_1^2a_2-\frac{a_1^4}{4})x^4+\dots
\end{aligned}$$

Näissä Maclaurinin kehitelmissä on otetu mukaan termit astetta ≤ 4. Koska kehitelmät yhtyvät pisteen $x=0$ ympäristössä, ovat x^k:n kertoimet samat molemmissa kehitelmissä $k=1,2,\dots$. Saadaan seraava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0=a_1+1 \\ \frac{a_1^2}{2}=a_2-\frac{a_1^2}{2} \\ \frac{a_2}{2}=a_3-a_1a_2+\frac{a_1^3}{3} \\ \frac{a_3}{2}-\frac{a_1^2}{8}=a_4-\frac{1}{2}a_2^2+a_1^2a_2-\frac{a_1^4}{4} \end{cases}$$

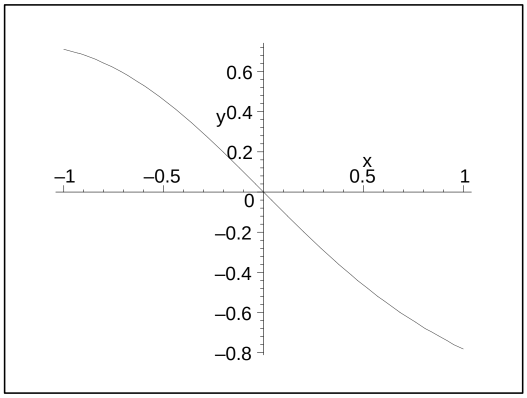
Saadaan

$$\begin{cases} a_1=-1 \\ a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{a_1^2}{2} \\ a_3=\frac{a_2}{2}a_1a_2-\frac{a_1^3}{3} \\ a_4=\frac{a_3}{2}-\frac{a_1^2}{8}+\frac{1}{2}a_2^2-a_1^2a_2+\frac{a_1^4}{4} \end{cases},$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{cases} a_1=-1 \\ a_2=0 \\ a_3=\frac{1}{3} \\ a_4=\frac{7}{24} \end{cases}.$$

Funktion f Maclaurinin kehitelmän ensimmäiset kolme nollasta poikkeavaa termiä ovat siten $P_4(x,y)=-x+\frac{x^3}{3}+\frac{7x^4}{24}$.



Kuva: Implisiittisesti määritelty funktio $y = y(x)$

Demonstraatioharjoitus 5, pe 15.2

1. [Ad4 13.1 / 5] Etsi ja luokittele funktion $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$ kriittiset pisteet.

   Ratkaisu. Ensinnäkin on selvä, että funktio on määritelty kun $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, eli $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0\}$.

   Kun $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, saadaan $f_1(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{8}{y^2}$ ja $f_2(x,y) = -\frac{x}{y^2} - 1$, joten kriittiset pisteet ratkaistaan yhtälösysteemistä

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} .$$

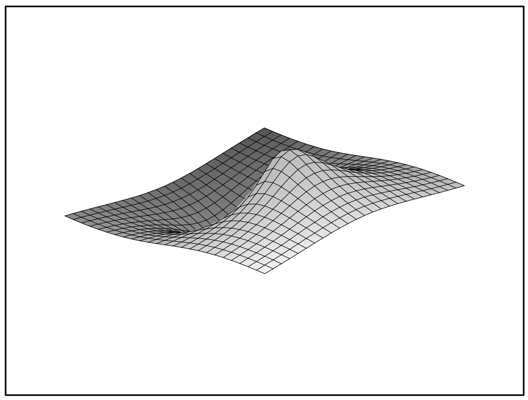
   Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $y = x^2/8$, ja sijoitus toiseen antaa $-64/x^3 = 1$, eli $x = -64^{1/3} = -4$ ja $y = 2$. On siis olemassa yksi kriittinen piste $(x,y) = (-4,2)$.

   Lasketaan toisen kertaluvun derivaatat pisteessä $(-4,2)$. Nyt $f_{11}(x,y) = 16/x^3$, $f_{12}(x,y) = -1/y^2$ ja $f_{22}(x,y) = 2x/y^3$, joten

$$\begin{aligned} A &= f_{11}(-4,2) = -\frac{1}{4} \\ B &= f_{12}(-4,2) = -\frac{1}{4} \\ C &= f_{22}(-4,2) = -1 \end{aligned}$$

Siispä $A < 0$ ja $B^2 = 1/16 < 1/4 = AC$, joten piste $(-4, 2)$ on lokaali maksimipiste. Piste ei kuitenkaan ole globaali maksimipiste, sillä $f(x, 1) = x + \frac{8}{x} - 1 \to \infty$ kun $x \to 0+$ (ja $f(x, 1) \to -\infty$ kun $x \to 0-$, joten globaalia minimiä ei myöskään ole.

2. [Ad4 13.1 / 18] Etsi funktion $f(x, y) = x/(1 + x^2 + y^2)$ maksimi- ja minimiarvot.



Kuva: Pinta $z = f(x, y) = x/(1 + x^2 + y^2)$

Ratkaisu. Ensin todetaan, että funktiolla ei ole singulaarisia pisteitä, sillä sen osittaisderivaatat ovat kaikkialla jatkuvia, jolloin se on kaikkialla differentioituva.

Nähdään, että kun $x^2 + y^2 \to \infty$, niin $f(x, y) \to 0$, sillä

$$|f(x,y)| = \frac{|x|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0 \text{ kun } x^2 + y^2 \to \infty,$$

Toisaalta esimerkiksi $f(\pm 1, 0) = \pm 1/2$. On siis olemassa $R > 0$ siten että $-\frac{1}{4} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{4}$ kun $x^2 + y^2 \geq R^2$. Funktiolla on siis maksimi- ja minimipiste. Nämä maksimit ja minimit ovat myös lokaaleja ääriarvopisteitä ja täten kriittisä pisteitä, sillä singulaarisia pisteitä ei ole. Tästä seuraa, että saa suurimman ja pienimmän arvonsa kriittisissä pisteissä. Määrätään siis funktion kriittiset pisteet. Pätee

$$f_1(x, y) = \frac{1 \cdot (1 + x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

ja

$$f_2(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Kriittiset pisteet saadaan asettamalla $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$, josta yhtälöt

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Toinen yhtälö toteutuu jos $x = 0$ tai $y = 0$. Vaihtoehto $x = 0$ hylätään, sillä jos se sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön saadaan $y^2 = -1$, millä ei ole reaalisia ratkaisuja y. Siispä $y = 0$, ja sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön saadaan $x = \pm 1$.

Kriittiset pisteet ovat siis $(1,0)$ ja $(-1,0)$. Funktion arvot näissä ovat $f(1,0) = \frac{1}{2}$ ja $f(-1,0) = -\frac{1}{2}$. Funktion suurin arvo on siis $f(1,0) = \frac{1}{2}$ ja funktion pienin arvo $f(-1,0) = -\frac{1}{2}$.

Mielenkiinnon vuoksi voisi vielä tarkistaa, mitä toisen kertaluvun deriivaatat kertovat yllä saatujen kriittisten pisteiden laadusta. Saadaan ensinnäkin

$$\begin{aligned}
f_{11}(x,y) &= \frac{-2x(1+x^2+y^2)^2 - 4x(1+x^2+y^2)(1+y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x^3 - 6xy^2 - 6x}{(1+x^2+y^2)^3} \\
f_{21}(x,y) &= \frac{-2y(1+x^2+y^2)^2 - 4x(1+x^2+y^2)(-2xy)}{(1+x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2y^3 + 6x^2y^2 - 2y}{(1+x^2+y^2)^3} \\
f_{22}(x,y) &= \frac{-2x(1+x^2+y^2)^2 - 4y(1+x^2+y^2)(1+y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2x^3 - 4y^3 + 4x^2y - 2xy^2 - 2x - 4y}{(1+x^2+y^2)^3},
\end{aligned}$$

josta pisteen $(1,0)$ tapauksessa

$$\begin{aligned}
A &= f_{11}(1,0) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}\\
B &= f_{12}(1,0) = 0\\
C &= f_{22}(1,0) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Koska $A < 0$ ja $B^2 = 0 < \frac{1}{4} = AC$, päätellään, että piste $(1,0)$ on lokaali maksimipiste, kuten pitääkin.

Pisteen $(-1,0)$ tapauksessa lasketaan

$$\begin{aligned}
A &= f_{11}(-1,0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\\
B &= f_{12}(-1,0) = 0\\
C &= f_{22}(-1,0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

jolloin $A > 0$ ja $B^2 = 0 < \frac{1}{4} = AC$. Tästä päätellään, että piste $(-1,0)$ on lokaali minimipiste, joka on odotettu tulos.

3. [Ad4 13.2 / 4] Etsi funktion $f(x,y) = x + 2y$ maksimi- ja minimiarvot kiekolla $x^2 + y^2 \leq 1$.

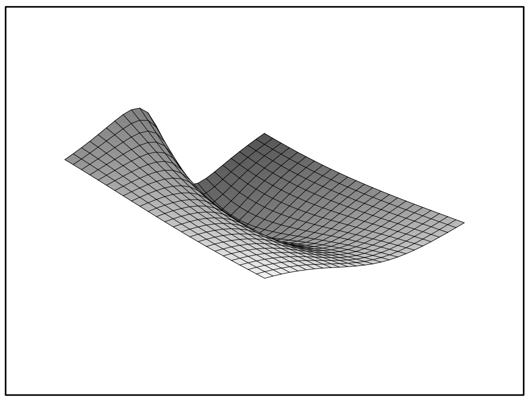
   Ratkaisu. Funktio $f(x,y) = x + 2y$ jatkuva, ja alue $x^2 + y^2 \leq 1$ on suljettu ja rajoitettu, joten funktiolla on tässä alueessa maksimi ja minimi. Funktiolla ei ole singulaarisia pisteitän alueessa $x^2 + y^2 < 1$ (eikä muuallakaan), joten ääriarvot se saavuttaa kriittisessä pisteissä tai reunalla $x^2 + y^2 = 1$. Huomataan kuitenkin heti, ettei kriittisiä pisteitä ole, sillä $f_1 \equiv 1 \neq 0$ ja $f_2 \equiv 2 \neq 0$. Funktio saavuttaa siis suurimman ja pienimmän arvonsa alueessa $x^2 + y^2 \leq 1$ sen reunalla $x^2 + y^2 = 1$ (=yksikköympyrä). Parametrisoidaan tämä ympyrä:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

   Saadaan $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + 2\sin t$. Tämä on jatkuva t:n funktio, joten sillä on maksimi ja minimi. Koska sillä ei ole singulaarisia pisteitä, ja koska se on jaksollinen se saavuttaa ääriarvonsa kriittisissä pisteissä. Saadaan $g'(t) = -\sin t + 2\cos t$, joten $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \tan t = 2$.

Kriittisissä pisteissä pätee siis $\frac{y}{x} = 2$, ja kun $x^2 + y^2 = 1$ saadaan $5x^2 = 1$, eli $x = \pm 1/\sqrt{5}$, ja tästä $y = \pm 2/\sqrt{5}$ (sama etumerkki kuin x:llä). Tästä seuraa, että $f(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$ on funktion $f(x, y) = x + 2y$ maksimi ja $f(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5}$ funktion minimi kiekolla $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. [Ad4 13.2 / 10] Etsi funktion $f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.



Kuva: Pinta $z = f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$

Ratkaisu. Koska

$$\frac{|x-y|}{1+x^2+y^2} \leq \frac{|x|}{x^2+y^2} + \frac{|y|}{x^2+y^2} \to 0, \text{ kun } x^2+y^2 \to \infty$$

pätee siis $f(x, y) \to 0$ kun $x^2 + y^2 \to \infty$. Koska esimerkiksi $f(1, 0) = \frac{1}{2}$ ja $f(-1, 0) = -\frac{1}{2}$ on funktiolla minimi $\leq -\frac{1}{2}$ ja maksimi $\geq \frac{1}{2}$ alueessa $y \geq 0$. nämä se saavuttaa joko alueen sisäpisteessä, jolloin kyseinen piste on kriittinen piste (singulaarisia pisteitä ei ole!), tai reunalla $y = 0$.

Lasketaan ensin kriittiset pisteet. Saadaan

$$f_1(x, y) = \frac{1 \cdot (1 + x^2 + y^2) - 2x(x - y)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + 2xy + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

ja

$$f_2(x, y) = \frac{-(1 + x^2 + y^2) - 2y(x - y)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy - 1}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

joten kriittiset pisteet ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + 2xy + 1 = 0 \\ -x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0 \end{cases}$$

ratkaisut. Lasketaan näiden yhtälöiden summa ja erotus

$$\begin{cases} -2x^2 + 2y^2 = 0 \\ 4xy + 2 = 0 \end{cases}$$

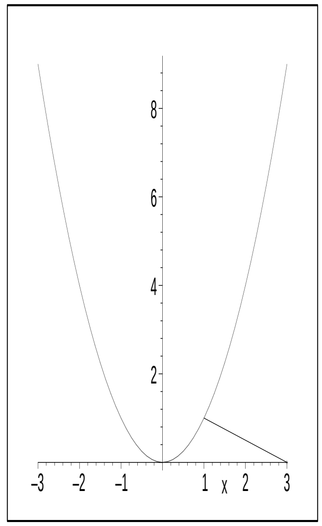
Ensimmäisestä näistä saadaan $y = \pm x$. Vaihtoehto $y = x$ on hylättävä, sillä jos se sijoitetaan toiseen, saadaan $x^2 = \frac{1}{2}$, mikä ei ole mahdollista. Siispä $y = -x$, mikä yhtälön $4xy = -2$ kanssa antaa $x = \pm 1/\sqrt{2} = -y$. Saadaan $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Piste $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ei sen sijaan kuulu alueeseen $y \geq 0$.

Tarkastellaan nyt funktion arvoja alueen reunalla $y = 0$. Tutkitaan siis funktiota $g(x) = f(x, 0) = x/(1 + x^2)$. Tämä saavuttaa ääriarvonsa kriittisissä pisteissä (sillä $g(x) \to 0$ kun $x \to \pm\infty$. Saadaan $g'(x) = f_1(x, 0) = (1 - x^2)/(1 + x^2)^2$, joten $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Näissä pisteissä pätee $g(1) = f(1, 0) = \frac{1}{2}$ ja $g(-1) = f(-1, 0) = -\frac{1}{2}$.

Funktion suurimmat ja pienimmät arvot alueessa $y \geq 0$ ovat siis joukossa $\left\{ f(1, 0) = \frac{1}{2}, f(-1, 0) = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. Suurin arvo on siis $f(1, 0) = \frac{1}{2}$ ja pienin $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. [Ad4 13.3 / 2] Etsi pisteen $(3, 0)$ lyhin etäisyys parabeliin $y = x^2$

   a) palauttamalla ongelma sitomattomaksi yhden muuttujan ääriarvo-ongelmaksi,
   b) käyttämällä Lagrangen kertoimia.



Kuva: Parabeli $y = x^2$ ja piste (3,0)

Ratkaisu. Pitää siis minimoida pisteen (x, y) etäisyys pisteeseen $(3, 0)$, kun $y = x^2$. Tuo etäisyys on $d(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$. Se saavuttaa miniminsä samassa pisteessä kuin $f(x, y) = d(x, y)^2 = (x-3)^2 + y^2$. Ongelma voidaan siis muotoilla

Minimoi $f(x, y) = (x-3)^2 + y^2$ kun $y = x^2$.

Ongelmalla on ratkaisu, sillä $0 \leq f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 9 \to \infty$ kun $|x| \to \infty$ tai $|y| \to \infty$, f on jatkuva joten sillä on minimi rajoitetulla ja suljetulla osalla parabelia $y = x^2$.

a) Sijoitetaan $y = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) funktioon $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 9$, jolloin saadaan $h(x) = f(x, x^2) = x^4 + x^2 - 6x + 9$. Tämä minimoidaan nyt yli $\mathbb{R}$:n. Koska h:lla on minimipiste ja sillä ei ole singulaarisia pisteitä, on minimipiste kriittinen piste, eli ratkaistaan yhtälö

$$0 = h'(x) = 4x^3 + 2x - 6.$$

Nähdään heti, että $x = 1$ on yksi ratkaisu. Suoritamme jakolaskun $\frac{4x^3+2x-6}{x-1} = 4x^2 + 4x + 6$, ja tällä ei ole reaalisia nollakohtia. Minimipisteen täytyy siis olla $x = 1$, ja $f(1, 1) = h(1) = 5$ on siis etsityn etäisyyden neliö. Pisteen $(3, 0)$ etäisyys parabeliin $y = x^2$ on siis $\sqrt{5}$ ja lähin piste on $(1, 1)$.

b) Olkoon $g(x, y) = x^2 - y$, jolloin ehto $y = x^2$ voidaan kirjoittaa $g(x, y) = 0$. Ongelma on siis muotoa

Minimoi $f(x,y)$ kun $g(x,y)=0$.

Muodostetaan Lagrangen funktio

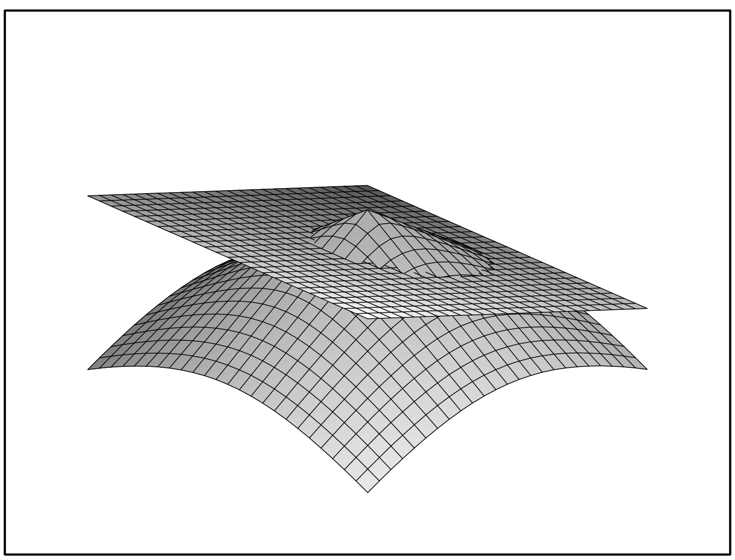
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=(x-3)^2+y^2+\lambda(x^2-y).$$

Koska f ja g ovat kaikkialla differentioituvia ja $\nabla g(x,y)=2x\mathbf{i}-\mathbf{j}\neq\mathbf{0}$, ongelman ratkaisu (joka on yllä todettu olevan olemassa) saavutetaan L:n kriittisessä pisteessä. Ratkaistaan siis yhtälösysteemi

$$\begin{cases} L_1(x,y,\lambda)=2(1+\lambda)x-6=0 \\ L_2(x,y,\lambda)=2y-\lambda=0 \\ L_3(x,y,\lambda)=x^2-y=0 \end{cases}.$$

Saadaan kahdesta viimeisestä yhtälöstä $\lambda=2y=2x^2$, ja sijoittamalla ensimmäiseen $(1+2x^2)x-3=0$ eli $2x^3+x-3=0$. Tämän olemme jo ratkaisseet. Sen ainut reaalinen ratkaisu on $x=1$, jolloin $y=0$ ja $f(1,1)=5$, siis $d(1,1)=\sqrt{5}$ on kysytty etäisyys.

6. [Ad4 13.3 / 12] Etsi funktion $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ suurin ja pienin arvo ellipsillä, joka syntyy kartion $z^2=x^2+y^2$ leikatessa tasoa $x-2z=3$.



Kuva: Kartion ja tason leikkauskäyrä

Ratkaisu. Funktio $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ on origon etäisyyden neliö pisteeseen (x,y,z). Ongelmalla on ratkaisu, sillä ellipsi on suljettu ja rajoitettu joukko ja funktio f on jatkuva.

Vaihtoehto 1. Käytetään Lagrangen kertoimia. Olkoon $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ ja $h(x,y,z) = x - 2z - 3$, jolloin ongelma voidaan muotolla seuraavasti

Minimoi ja maksimoi $f(x,y,z)$ kun $g(x,y,z) = 0$ ja $h(x,y,z) = 0$.

Funktiot f, g ja h ovat kaikkialla differentioituvia, ja

$$\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) = -4y\,\mathbf{i} + (4x+2z)\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k},$$

joka on nolla vain jos $x = y = z = 0$, mikä ei ole mahdollista pinnalla $x - 2z - 3 = 0$ eikä näin ollen ellipsillä joka muodostuu tämän tason ja kartion $z^2 = x^2 + y^2$ leikkauksena. Muodostetaan Lagrangen funktio

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z) \\ &= (1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + (1-\lambda)z^2 + \mu x - 2\mu - 3\mu z. \end{aligned}$$

Yllä sanotusta päätellään, että ääriarvot saavutetaan Lagrangen funktion kriittisissä pisteessä. Ratkaistaan nämä.

$$\begin{cases} L_1 = 2(1+\lambda)x + \mu = 0 \\ L_2 = 2(1+\lambda)y = 0 \\ L_3 = 2(1-\lambda)z - 2\mu = 0 \\ L_4 = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ L_5 = x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Toisesta yhtälöstä saadaan $\lambda = -1$ tai $y = 0$. Vaihtoehto $\lambda = -1$ on hylättävä, koska muuten ensimmäisestä yhtälöstä saataisiin $\mu = 0$ ja kolmannesta siten $z = 0$, viidennestä $x = 3$ jollon kolmas yhtälö ei ole tosi. Siispä $y = 0$. Silloin neljännestä yhtälöstä saadaan $z = \pm x$, jolloin viides yhtälö antaa $x = -3 = z$ tai $x = 1 = -z$. Vastaavat λ- ja μ-arvot ovat $\lambda = -3, \mu = -12$ sekä $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = -\frac{4}{3}$. On siis olemassa kaksi kriittistä pistettä $(-3,0,-3)$ ja $(1,0,-1)$ (nyt ei välitetä λ:sta ja μ:stä), jolloin toisen täytyy olla maksimipiste ja toisen minimipiste. Koska $f(-3,0,-3) = 18$ ja $f(1,0,-1) = 2$, on kysytty maksimi siis 18 ja minimi 2. (Ellipsin etäisin piste origosta on siis $(-3,0,3)$ ja etäisyys $3\sqrt{2}$, kun taas lähin piste on $(1,0,-1)$, jonka etäisyys origosta on $\sqrt{2}$.

Vaihtoehto 2.

Voidaan eliminoida x:n ja y:n funktiosta f ehdon $z^2 = x^2 + y^2$ avulla. Saadaan funktio $F(z) = z^2$, jonka ääriarvot on etsittävä kun $z^2 = x^2+y^2$ ja $x-2z-3 = 0$. Toisen ehdon avulla eliminoidaan ensimmäisestä x ja saadaan $y^2 = -3z^2 - 12z - 9$. Ainut rajoitus z:lle on siis $-3z^2 - 12z - 9 \geq 0$, eli $z^2 + 4z + 3 \leq 0$. Tämä tapahtuu täsmälleen kun $-3 \leq z \leq -1$, jolloin $2 \leq F(z) \leq 18$.