Mat-1.3281 Analyysi I (Mitta ja integraali) **Turunen**
Harjoitus 11 (24.4.2006)

Seuraavassa kirjoitetaan $L^p(\mathbb{R}^n) := L^p(\lambda_{\mathbb{R}^n})$, missä $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ on Lebesgue-mitta. Kun $x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, merkitään $|x| := (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$. Silloin x-keskinen r-säteinen avoin kuula on $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ ja vastaava suljettu kuula on joukko $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq r\}$. Joukon $S \subset \mathbb{R}^n$ *halkaisija* on $\operatorname{diam}(S) := \sup_{x,y\in S} |x-y|$. Merkitään

$$\fint_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{R}^n} := \frac{1}{\lambda_{\mathbb{R}^n}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{R}^n}.$$

Määritelmä. Suljettujen kuulien perhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ on joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ *hieno peite* (eli *Vitali-peite*), jos se on joukon E peite, jolle $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{G} : x \in B,\ 0 < \operatorname{diam}(B) < \varepsilon$.

Vitalin peitelause. *Olkoon suljettujen kuulien perhe $\mathcal{G}$ joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ hieno peite. Silloin on olemassa numeroituva pistevieraiden kuulien perhe $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, jolle*

$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B) = 0.$$

1. Olkoon μ äärellinen Borel-mitta kompaktilla metrisellä avaruudella (X,d). Osoita, että $C(X)$ on (luonnollisella tulkinnalla) tiheä avaruudessa $L^p(\mu)$, jos $1 \leq p < \infty$. Miksi $p = \infty$ ei välttämättä kelpaa?

2. Määritellään $(\tau_h f)(x) := f(x+h)$, kun $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$. Osoita, että $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to_{h\to 0} 0$, jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $1 \leq p < \infty$. Miksi $p \neq \infty$?

3. Luennoilla todistettiin Vitalin peitelause rajoitetulle joukolle $E \subset \mathbb{R}^n$; esitä todistus rajoittamattomalle joukolle E.

4. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $r > 0$. Osoita, että kuvaus $(x \mapsto \fint_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{R}^n}) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ on jatkuva ja että Hardy–Littlewood -maksimaalifunktio $Mf : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on Lebesgue-mitallinen, missä
$$Mf(x) := \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{R}^n}.$$

5. Ota $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$, jolle $0 < \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Osoita, että "riittävän suurilla" $|x|$ pätee $Mf(x) \geq C/|x|^n$, missä $C > 0$ on vakio; näytä, että $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

(11.1) Olkoon $1 \le p < \infty$. Ota $\varepsilon > 0$.

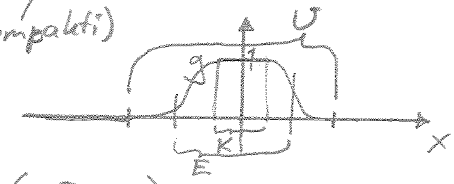
Ota Borel-joukko $E \subset X$ (nyt $\mu(E) \le \mu(X) < \infty$).

$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty[$ on Borel-säännöllinen,

$E \in \Sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$, $\mu = \mu^*|_{\Sigma(\mathcal{T})}$.

$\overset{\text{Lause (s. 19)}}{\Longrightarrow} \exists U, K \subset X :\ \underbrace{U}_{\text{avoin}} \supset E \supset \underbrace{K}_{\text{suljettu (kompakti)}}$, $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.

$\overset{\text{Urysohn}}{\Longrightarrow} \exists g \in C(X) :\ K \prec g \prec U$.



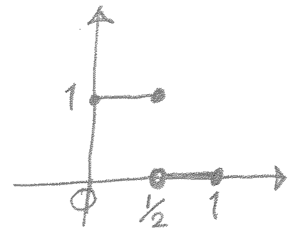
$\Rightarrow \|\chi_E - g\|^p_{L^p(\mu)} = \int \underbrace{|\chi_E - g|^p}_{\le \chi_{U \setminus K}} d\mu \le \mu(U \setminus K) < \varepsilon$. ☒

$\Rightarrow$ Jos $f : X \to \mathbb{R}$ yksinkertainen ja mitallinen, niin $\exists g \in C(X) :\ \|f - g\|_{L^p(\mu)} < \varepsilon$. ☒

Jos $f \in L^p(\mu)$, niin $\exists g \in C(X) : \|f-g\|_{L^p(\mu)} < \varepsilon$, koska yksinkertaiset μ-integroituvat ovat tiheässä $L^p(\mu)$:ssä.⊛ ☒

Esim. $p = \infty$, $X = [0,1]$,

$\mu = (\lambda_{\mathbb{R}})_X$, $f = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \in L^\infty(\mu)$.



Jos $g \in C(X)$, niin

$\exists \delta > 0 :\ |x - \tfrac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(\tfrac{1}{2})| < \frac{1}{k}$,

joten $\|f - g\|_{L^\infty(\mu)} \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2} > 0$.

Siten $C(X) \subset L^\infty(\mu)$ ei ole tiheä tässä.

⊛ Riittää olettaa, että $0 \le f \in L^p(\mu)$.

Ota mitalliset yksinkertaiset $f_k : X \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$, joille

$\forall x \in X :\ 0 \le f_k(x) \le f_{k+1}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$.

Nyt $\|f - f_k\|^p_{L^p(\mu)} = \int (f - f_k)^p d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{\text{dom. konv.}} 0$. ☒

(11.2) Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota $g \in C(\mathbb{R}^n)$ s.e. $\mathrm{supp}(g) = \overline{\{g \neq 0\}}$ kompakti ja

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon. \quad \circledast$$

[GZ 3.46]
$\Rightarrow g$ on tasaisesti jatkuva eli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n: |h| < \delta \Rightarrow |\underbrace{g(x+h)}_{= \tau_h g(x)} - g(x)| < \varepsilon.$$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p} \le \underbrace{\|\underbrace{\tau_h f - \tau_h g}_{= \tau_h(f-g)}\|_{L^p}}_{= \|f-g\|_{L^p} < \varepsilon} + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_{L^p}}_{\xrightarrow[h \to 0]{\circledast\circledast} 0} + \underbrace{\|g - f\|_{L^p}}_{< \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \tau_h f \xrightarrow[h \to 0]{L^p} f. \quad \square$$

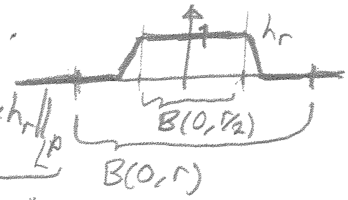
$\circledast\circledast$ Kun $\mathrm{supp}(g) \subset B(0,r)$ ja $|h| < \delta$, saadaan

$$\|\tau_h g - g\|_{L^p} = \Big(\int_{B(0, r+\delta)} \underbrace{|g(x+h) - g(x)|}_{< \varepsilon}{}^p \, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(x) \Big)^{1/p}$$

$$\le \lambda_{\mathbb{R}^n}(B(0, r+\delta)) \cdot \varepsilon.$$

$\circledast$ Tehtävä (11.1) $\Rightarrow \exists g_r \in C(\overline{B(0,r)})$ "$\subset$" $L^p(\mathbb{R}^n)$ [Tulkinta: $|x| > r \Rightarrow g_r(x) = 0$]: $\|f \cdot \chi_{B(0, r/2)} - g_r\|_{L^p} < \varepsilon$.

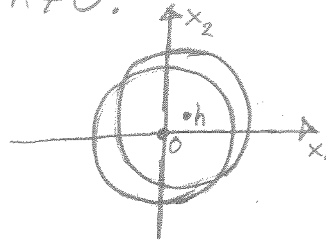
Ota $h_r \in C(\mathbb{R}^n)$ s.e. $\overline{B(0, r/2)} \prec h_r \prec B(0,r)$.



$$\Rightarrow \|f - g_r \cdot h_r\|_{L^p} \le \underbrace{\|f - f \cdot \chi_{B(0, r/2)}\|_{L^p}}_{\xrightarrow[r \to \infty]{\text{dom. konv.}} 0.} + \underbrace{\|f \cdot \chi_{B(0, r/2)} - g_r \cdot h_r\|_{L^p}}_{\le \|f \cdot \chi_{B(0, r/2)} - g_r\|_{L^p} < \varepsilon.}$$

Huom. Yllä $p \neq \infty$. Esim.

$$\|\tau_h \chi_{B(0,1)} - \chi_{B(0,1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1 \quad \text{kaikilla } h \neq 0.$$



11.3

Olkoon $\mathcal{G}$ joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ Vitali-peite,

$S_k := \{ x \in \mathbb{R}^n : k < |x| < k+1 \}$ $(k \geq 0)$,

$E_k := E \cap S_k$,

$\mathcal{G}_k := \{ B \in \mathcal{G} : B \subset S_k \}$.

Nyt $\mathcal{G}_k$ on rajoitetun joukon $E_k \subset \mathbb{R}^n$ Vitali-peite, koska $S_k \subset \mathbb{R}^n$ on avoin.

[Vitalin peitelause rajoitetuille joukoille] $\Rightarrow$

$\exists \mathcal{F}_k \subset \mathcal{G}_k$ numeroituva erillisten kuulien perhe,

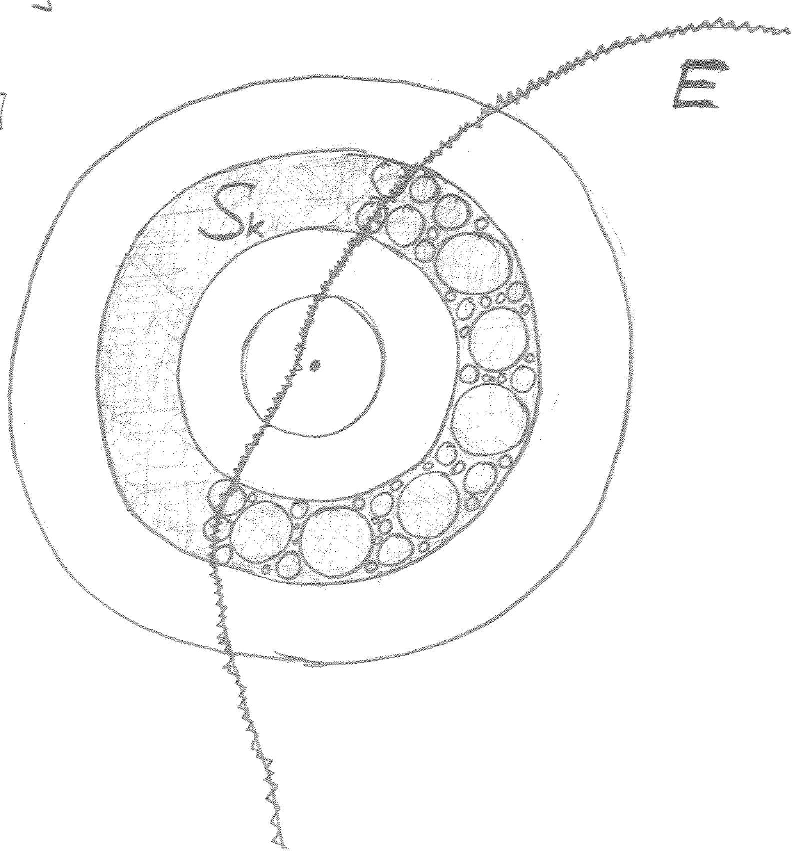
jolle $\lambda_{\mathbb{R}^n}(E_k \setminus \bigcup \mathcal{F}_k) = 0$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} := \dot{\bigcup}_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k \subset \mathcal{G}$ on numeroituva erillisten kuulien perhe,

jolle

$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(\underbrace{E \setminus \bigcup \mathcal{F}}_{\subset \dot{\bigcup}_{k=0}^{\infty} [(E_k \setminus \bigcup \mathcal{F}_k) \cup \{|x| = k\}]}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\underbrace{\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E_k \setminus \bigcup \mathcal{F}_k)}_{=0} + \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}^n}(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = k\})}_{=0} \Big]$$

$\Rightarrow \lambda_{\mathbb{R}^n}(E \setminus \bigcup \mathcal{F}) = 0$. $\square$



(11.4) Olkoon

$$g_r(x) := \fint_{B(x,r)} |f| \, d\mu$$

$$= \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| \, d\mu \qquad (\mu = \lambda_{\mathbb{R}^n}).$$

Huomaa, että $\mu(B(x,r)) = \mu(B(0,r)) = c_n \cdot r^n$ (dimensiosta n riippuva vakio) ja

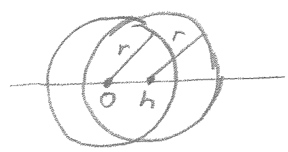
$$0 \leq g_r(x) \leq \frac{1}{\mu(B(0,r))} \|f\|_{L^1(\mu)} < \infty.$$

Funktio $g_r : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on jatkuva koska

$$|g_r(x+h) - g_r(x)| = \frac{1}{\mu(B(0,r))} \left| \int_{B(x+h,r)} |f| \, d\mu - \int_{B(x,r)} |f| \, d\mu \right|$$

$$= \frac{1}{\mu(B(0,r))} \left| \int_{B(x+h,r) \setminus B(x,r)} |f| \, d\mu - \int_{B(x,r) \setminus B(x+h,r)} |f| \, d\mu \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(B(0,r))} \cdot 2 \cdot \underbrace{\mu(B(h,r) \setminus B(0,r))}_{\leq (2r)^{n-1} \cdot |h|} \cdot \|f\|_{L^1(\mu)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \quad \square$$



Näytetään, että $\{Mf > t\}$ on avoin ja siten Mf Borel-mitallinen ($\Rightarrow$ Lebesgue-mitallinen).

Ota $x \in \{Mf > t\}$ (missä $t \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow \exists r > 0 : \quad g_r(x) = \fint_{B(x,r)} |f| \, d\mu > t.$$

$$\overset{g_r \text{ jatkuva}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \; [\, |h| < \delta \Rightarrow \underbrace{g_r(x+h)}_{\leq Mf(x+h)} > t \,].$$

Siis $B(x,\delta) \subset \{Mf > t\}$, joten $\{Mf > t\}$ on avoin. $\blacksquare$

(11.5)

"Riittävän suureksi" kelpaa mikä tahansa $\delta > 0$.

Olkoon $|x| \geq \delta$ ja $k \geq 2$.

Silloin

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f| \, d\mu \qquad \Big| \Big| \Big| \qquad \mu = \lambda_{\mathbb{R}^n}$$

$$\geq \fint_{B(x,k|x|)} |f| \, d\mu$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\mu(B(x,k|x|))}}_{=[C_n (k|x|)^n]^{-1}} \int_{\underbrace{B(x,k|x|)}_{\supset B(0,k\delta/2)}} |f| \, d\mu$$

C_n ← dimensiosta n riippuva vakio $< \infty$.

$$\geq C_n^{-1} \cdot k^{-n} \cdot |x|^{-n} \underbrace{\int_{B(0,k\delta/2)} |f| \, d\mu}_{\geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^1(\mu)} > 0 \text{ "suurilla } k \in \mathbb{Z}^+\text{"}}$$

$$\left(\int_{B(0,R)} |f| \, d\mu \xrightarrow[R \to \infty]{\text{mon. konv.}} \|f\|_{L^1(\mu)} \right)$$

$$\Rightarrow Mf(x) \geq C_{f,\delta} \cdot |x|^{-n}, \qquad (*)$$

missä vakio $C_{f,\delta}$ riippuu f:stä ja δ:sta. $\boxtimes$

$$\|Mf\|_{L^1(\mu)} = \int Mf \, d\mu$$

$$\geq \int_{|x| \geq \delta} Mf \, d\mu$$

$$\geq C_{f,\delta} \int_{|x| \geq \delta} |x|^{-n} \, d\mu = C_{f,\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\delta \geq |x| \geq 2^k\delta} |x|^{-n} \, d\mu$$

$$\geq C_{f,\delta} \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1}\cdot\delta)^{-n} \cdot \underbrace{\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k+1}\cdot\delta \geq |x| \geq 2^k \cdot \delta\})}_{= C_n \cdot ((2^{k+1}\delta)^n - (2^k\delta)^n)}$$

$$= C_{f,\delta} \cdot C_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(1 - 2^{-n})}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$= \infty.$$

$\Rightarrow Mf \notin L^1(\mu)$. ▪