Mat-1.3081 Algebra I Kevät 2008 Nevanlinna / Maasalo

Harjoitus 8 (Keskiviikko 2.4.)

1) a) Luettele kaikki ryhmähomomorfismit $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$

b) Mitkä näistä ovat rengashomomorfismeja?

c) Muuttuuko tilanne, jos $\mathbb{Z}_6$ ja $\mathbb{Z}_2$ vaihtavat paikkaa? Miten?

2) Olkoon $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. Osoita, että $\langle n \rangle$ on maksimaalinen ideaali $\mathbb{Z}$:ssa jos ja vain jos n on alkuluku.

(Vihje: $\mathbb{Z}$:n kaikki aliryhmät ovat ryhmät $m\mathbb{Z}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Perustele!)

3) Olkoon $R = C[0,1]$ jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muodostama rengas. Osoita, että M on R:n maksimaalinen ideaali jos ja vain jos on olemassa r, $0 \leq r \leq 1$ s.e. $M = M_r := \{ f \in R \mid f(r) = 0 \}$.

4) Olkoon $\mathbb{F}$ kunta ja tarkastellaan matriisirengasta $M_2(\mathbb{F})$. Osoita, että $M_2(\mathbb{F})$:llä on vain triviaalit ideaalit.

(Vihje: Osoita, että jos A on ideaali ja $A \neq \{0\}$, A sisältää kääntyvän matriisin)

5) Olkoon p alkuluku, ja määritellään

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\ p \nmid n,\ n \neq 0 \right\}$$

Osoita, että

a) $\mathbb{Z}_{(p)}$ on kokonaisalue ja etsi sen yksiköt.

b) $\mathbb{Z}_{(p)}$ on lokaali rengas, eli sillä on yksikäsitteinen maksimaalinen ideaali.

6) Olkoon R rengas, ja $P \subset R$ alkuideaali (prime ideal). Oletetaan, että tekijärenkaassa R/P ei ole ei-triviaaleja nilpotentteja. Osoita, että R/P on kokonaisalue.