Mat-1.3081 Algebra I Kevät 2008 Nevanlinna / Maasalo

Harjoitus 7

1) Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas, jossa on ykkösalkio. Olkoot $a,b \in R$. Osoita, että
   a) Ryhmän $(R,+)$ kommutatiivisuus seuraa muista rengasaksioomista.
   b) $1+ab$ on yksikkö jos ja vain jos $1+ba$ on yksikkö.

2) Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas, jossa on ykkösalkio. Olkoon $e \in R$ idempotentti, eli $e^2 = e$. Osoita, että
   a) $(1-e)re$ ja $er(1-e)$ ovat nilpotentteja $\forall r \in R$
   b) $e+(1-e)re$ ja $e+er(1-e)$ ovat idempotentteja $\forall r \in R$
   c) $e \in Z(R) \Leftrightarrow ea = ae \ \forall a \in R$, a idempotentti
   $\Leftrightarrow eb = be \ \forall b \in R$, b nilpotentti

3) Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas, ja $A \subset R$ ideaali. Osoita, että R/A on rengas, kun yhteen- ja kertolasku määritellään seuraavasti:

$$(a+A)+(b+A) = (a+b)+A$$
$$(a+A)(b+A) = ab+A$$

$\forall a,b \in R$. Jos R:ssä on ykkösalkio, mikä on tekijärenkaan R/A ykkösalkio?

4) Olkoon $R = \mathbb{Z}[i] = \{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}\}$ Gaussin kokonaislukurengas.
   a) Olkoon $A = \langle\{2+i\}\rangle$. Määrää tekijärengas R/A.
   b) Osoita, että R:n yksikköryhmä on $\{1,-1,i,-i\}$.

5) Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas ja A sen ideaali. Osoita, että
   a) R/A:ssa ei ole nollasta eriäviä nilpotentteja jos ja vain jos $r^2 \in A \Rightarrow r \in A$.
   b) Jos R:ssä on ykkösalkio, ja $A = Z(R)$, R on kommutatiivinen rengas.

6) Olkoon $g^2 = 1$. Etsi kaikki seuraavien renkaiden yksiköt, nilpotentit ja idempotentit alkiot.
   a) $\mathbb{Z}_2(g) = \{a+bg : a,b \in \mathbb{Z}_2\}$
   b) $\mathbb{Z}_3(g)$