Mat-1.3081 Algebra I Kevät 2008 Nevanlinna / Maasalo

Harjoitus 6

Huomaa, että tehtävä 4) on tällä kertaa pakollinen kaikille! Tehtäviä palauttavien riittää sen lisäksi laskea vähintään yksi tehtävä.

1) Olkoon S joukko ja $P(S)$ sen osajoukkojen joukko. Määritellään $P(S)$:ssä laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ seuraavasti: Jos $A, B \in P(S)$

$$A + B = A \cup B \setminus A \cap B \quad (\text{eli } A \cup B - A \cap B)$$
$$AB = A \cap B$$

Osoita, että $(P(S), +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas, jossa on kertolaskun yksikköalkio.

2) Olkoon $(\mathbb{H}, +, \cdot)$, missä $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, kvaternionirengas, jonka nolla- ja ykkösalkiot ovat $0_{\mathbb{H}} = 0$, $1_{\mathbb{H}} = 1$. Laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ rajoitettuna reaaliluvuille $\mathbb{R}$ ovat reaalilukujen tavanomaiset yhteen- ja kertolaskut, ja lisäksi pätee

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$
$$ai = ia, \quad aj = ja, \quad ak = ka \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

a) Laske ji, kj, ik

b) Olkoon kvaternionin $q = a + bi + cj + dk$ konjugaattikvaternioni $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. Laske $q\bar{q}$.

c) Osoita, että $\mathbb{H}^* = \{u \in \mathbb{H} : \exists\, u^{-1} \in \mathbb{H} \text{ s.e. } u^{-1}u = 1_{\mathbb{H}}\} = \mathbb{H} \setminus \{0\}$

d) Merkitään $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Osoita, että joukko

$$\mathbb{H}' = \{M(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

muodostaa renkaan $M_2(\mathbb{C})$ alirenkaan.

e) Osoita, että renkaat $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{H}'$ ovat isomorfiset.

3) Osoita, että renkaat

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\} \quad \text{ja} \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

eivät ole isomorfisia. Totea, että additiivisina ryhminä ne ovat isomorfisia. Renkaiden karteesinen tulo ja sen laskutoimitukset määritellään kuten ryhmien tapauksessa, ks. kirjan sivu 171.

4) Tässä tehtävässä osoitamme, että S_4 on ratkeava. Kaikki tarvittava tieto löytyy kirjasta, erityisesti luvuista 6 ja 7. Alternoivan ryhmän A_4 osalta esimerkki 2.4 c) (luvussa 7) on keskeinen.

Käy seuraavat kohdat lävitse huolellisesti perustellen.

a) Mitä tarkoittaa ryhmän ratkeavuus, miten äärellisen ryhmän ratkeavuus voidaan määritellä?

b) Totea, että $A_4 \triangleleft S_4$.

c) Osoita, että $K_4 \triangleleft A_4$, missä K_4 on Kleinin ryhmä.

d) Etsi aliryhmä $H \triangleleft K_4$.

e) Osoita, että $S_4/A_4 \simeq C_2$, $A_4/K_4 \simeq C_3$, $K_4/H \simeq C_2$, $H \simeq C_2$, missä C_k on kertalukua k oleva syklinen ryhmä.

Totea lopuksi, että S_4 on ratkeava.