Mat-1.3081 Algebra I Kevät 2008 Nevanlinna / Maasalo

Harjoitus 3

1) Olkoon $\mathbb{H} := \{\pm I, \pm U, \pm K, \pm J\}$, missä

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ja i on imaginaariyksikkö. Osoita, että $\mathbb{H}$ muodostaa kertaluku 8 olevan ei-kommutatiivisen ryhmän matriisikertolaskun suhteen. Osoita lisäksi, että $U^4 = I$, $K^2 = U^2$ ja $K^{-1}UK = U^3$.

2) Etsi seuraavien homomorfismien ytimet:

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$
$x \mapsto [x]$

b) $f: \mathbb{H} \to \mathbb{Z}_2$, $f(U) = [0]$, $f(K) = [1]$

3) Opiskele kirjan esimerkki 1.3. d). Osoita, että ei ole olemassa nollasta poikkeavaa homomorfismia $f: S_3 \to \mathbb{Z}_3$.

4) Mitkä seuraavista struktuureista ovat ryhmiä?

a) $G = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ varustettuna yhteenlaskulla

b) $G = \mathbb{R}$, $a \cdot b = a + b + 1$

c) $G = \mathbb{R}$, $a \cdot b = a + b - ab$

d) $G = \{4, 8, 12, 16\}$ varustettuna kertolaskulla $\mathbb{Z}_{20}$:ssä.

5) Olkoon F kunta, jossa on kaksi alkiota. Näytä, että $GL(2, F) \simeq S_3$.

6) Etsi seuraavien ryhmien kaikki aliryhmät

a) $\mathbb{H}$

b) $K_4 := \{I, A, B, C\}$, missä $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja laskutoimituksena matriisikertolasku.