

LDYS06.mw

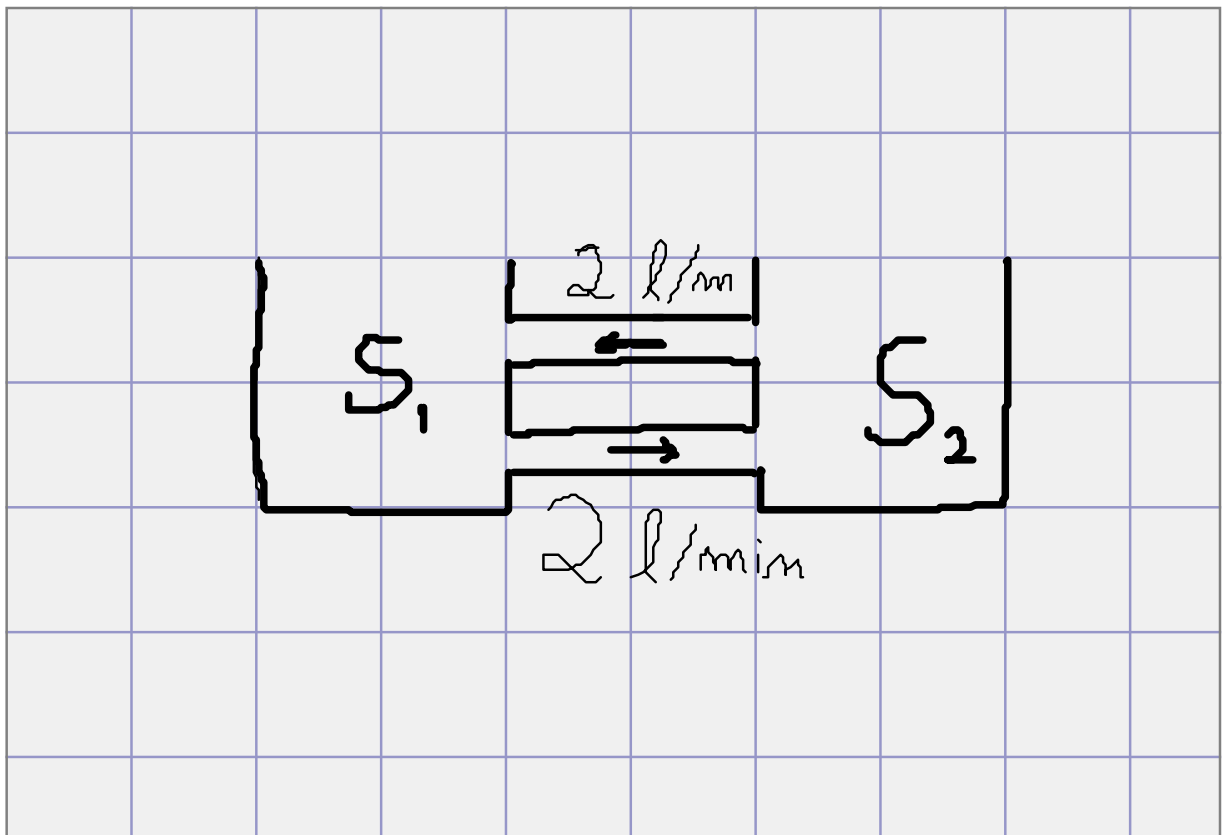
Lineaariset differentiaaliyhtälösystemit L9-> syksyllä 2006

Alustukset

```
> with(LinearAlgebra):with(linalg):  
> with(plots): with(DEtools):
```

Seosprobl, HY

```
>
```



```
>
```

```
> A:=<<-2/100, 2/100>|<2/100, -2/100>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix}$$

(2.1)

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{25} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

> (lambda, ov):=Eigenvectors(A);

$$\lambda, ov := \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{25} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

> x:=[ov[1..-1,1],ov[1..-1,2]];

$$x := \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \quad (2.4)$$

> Y:=C1*exp(lambda[1]*t)*x[1]+C2*exp(lambda[2]*t)*x[2];

$$Y := \begin{bmatrix} C1 - C2 e^{-\frac{1}{25}t} \\ C1 + C2 e^{-\frac{1}{25}t} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

> AE:=subs(t=0,Y)=<0,150>;AE:=map(eval,%);

$$AE := \begin{bmatrix} C1 - C2 \\ C1 + C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$AE := \begin{bmatrix} C1 - C2 \\ C1 + C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

> Ceet:=LinearSolve(<<1,1>|<-1,1>>,<0,150>);

$$Ceet := \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

> Y:=subs(C1=Ceet[1],C2=Ceet[2],Y);

$$Y := \begin{bmatrix} 75 - 75 e^{-\frac{1}{25}t} \\ 75 + 75 e^{-\frac{1}{25}t} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

> y12:=evalm(Y);

$$y12 := \begin{bmatrix} 75 - 75 e^{-\frac{1}{25}t} & 75 + 75 e^{-\frac{1}{25}t} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

> y1:=y12[1];y2:=y12[2];

$$y1 := 75 - 75 e^{-\frac{1}{25} t}$$

$$y2 := 75 + 75 e^{-\frac{1}{25} t}$$

(2.10)

Tarkistus:

> **dy:=<diff(y1,t),diff(y2,t)>;**

$$dy := \begin{bmatrix} 3 e^{-\frac{1}{25} t} \\ -3 e^{-\frac{1}{25} t} \end{bmatrix}$$

(2.11)

> **oikeap:=A.<y1,y2>+b;**

$$oikeap := b + \begin{bmatrix} 3 e^{-\frac{1}{25} t} \\ -3 e^{-\frac{1}{25} t} \end{bmatrix}$$

(2.12)

Samoja ovat, siispä diffyhtälö toteutuu. Entä alkuehdot:

> **eval(subs(t=0,y1));eval(subs(t=0,y2));**

0

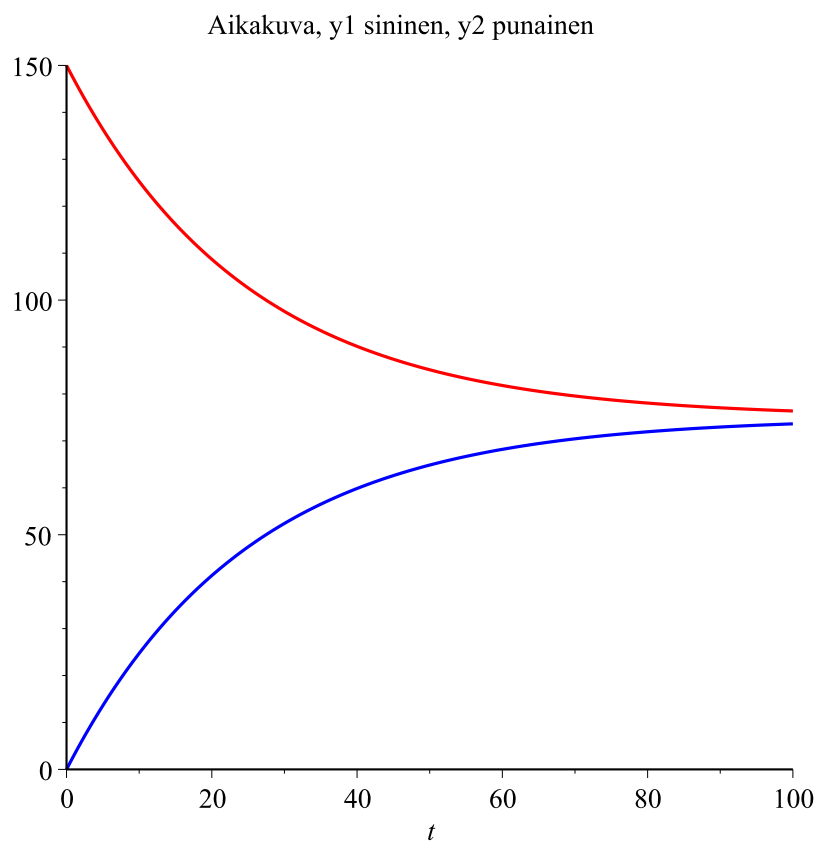
150

(2.13)

Kyllä vaan, siis oikein laskettu!

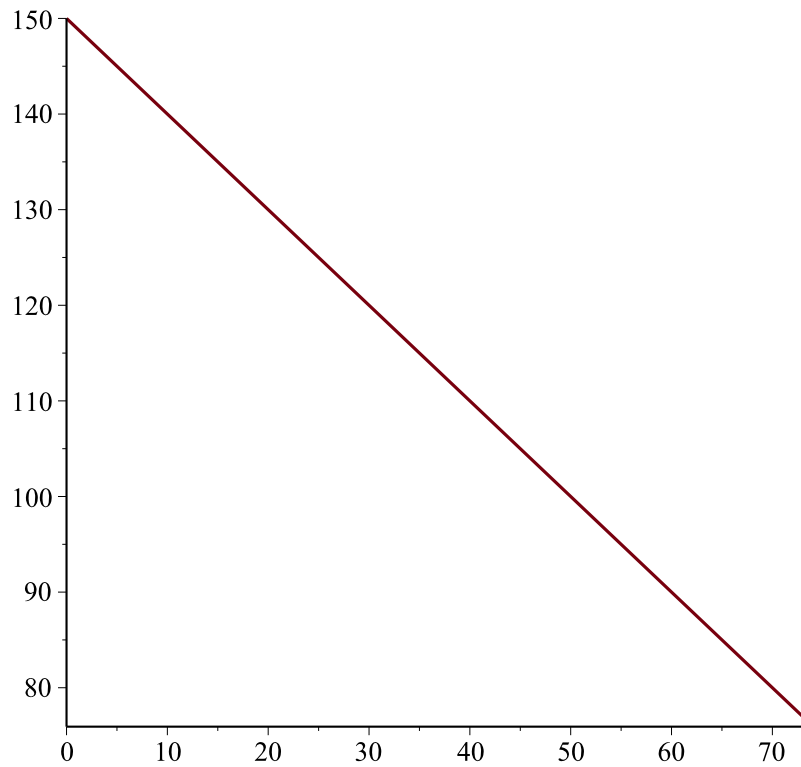
Nyt piirrokset:

> **plot([y1,y2],t=0..100,color=[blue,red],title="Aikakuva, y1
sininen, y2 punainen");**



```
> plot([y1,y2,t=0..100],title="Faasikuva");
```

Faasikuva



Seosprobleema

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):with(linalg):with(plots):
> A:=<<-1/10,1/10>|<3/40,-1/5>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

(3.1)

```
> (lambda, ov):=Eigenvectors(A);
```

$$\lambda, ov := \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.2)

```
> x:=[ov[1..-1,1],ov[1..-1,2]];
```

$$x := \left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right] \quad (3.3)$$

> Yh:=C1*exp(lambda[1]*t)*x[1]+C2*exp(lambda[2]*t)*x[2];

$$Y_h := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C1 e^{-\frac{1}{4} t} + \frac{3}{2} C2 e^{-\frac{1}{20} t} \\ C1 e^{-\frac{1}{4} t} + C2 e^{-\frac{1}{20} t} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

HY-yrite: Yksinkertaisinta on yrittää vakiovektoria y=v;

> yp:=<v1,v2>;

$$y_p := \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

> b:=<3/2,3>;

$$b := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

> map(diff,yp,t)='A.yp'+b;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A.y_p + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

> Yp:=LinearSolve(A,-b);

$$Y_p := \begin{bmatrix} 42 \\ 36 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

> Y:=Yh+Yp;

$$Y := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C1 e^{-\frac{1}{4} t} + \frac{3}{2} C2 e^{-\frac{1}{20} t} + 42 \\ C1 e^{-\frac{1}{4} t} + C2 e^{-\frac{1}{20} t} + 36 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

> AE:=subs(t=0,Y)=<25,15>;AE:=map(eval,%);

$$AE := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C1 + \frac{3}{2} C2 + 42 \\ C1 + C2 + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$AE := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C1 + \frac{3}{2} C2 + 42 \\ C1 + C2 + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

> Ceet:=LinearSolve(<<1, -2>|<3/2, 1>>, <25-42, 15-36>);

$$Ceet := \begin{bmatrix} \frac{29}{8} \\ -\frac{55}{4} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

> Y:=subs(C1=Ceet[1], C2=Ceet[2], Y);

$$Y := \begin{bmatrix} -\frac{29}{16} e^{-\frac{1}{4}t} - \frac{165}{8} e^{-\frac{1}{20}t} + 42 \\ \frac{29}{8} e^{-\frac{1}{4}t} - \frac{55}{4} e^{-\frac{1}{20}t} + 36 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

> y12:=evalm(Y);

$$y12 := \begin{bmatrix} -\frac{29}{16} e^{-\frac{1}{4}t} - \frac{165}{8} e^{-\frac{1}{20}t} + 42 & \frac{29}{8} e^{-\frac{1}{4}t} - \frac{55}{4} e^{-\frac{1}{20}t} + 36 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

> y1:=y12[1]; y2:=y12[2];

$$\begin{aligned} y1 &:= -\frac{29}{16} e^{-\frac{1}{4}t} - \frac{165}{8} e^{-\frac{1}{20}t} + 42 \\ y2 &:= \frac{29}{8} e^{-\frac{1}{4}t} - \frac{55}{4} e^{-\frac{1}{20}t} + 36 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tarkistus:

> dy:=<diff(y1,t), diff(y2,t)>;

$$dy := \begin{bmatrix} \frac{29}{64} e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{33}{32} e^{-\frac{1}{20}t} \\ -\frac{29}{32} e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{11}{16} e^{-\frac{1}{20}t} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

> oikeep:=A.<y1,y2>+b;

$$oikeep := \begin{bmatrix} \frac{29}{64} e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{33}{32} e^{-\frac{1}{20}t} \\ -\frac{29}{32} e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{11}{16} e^{-\frac{1}{20}t} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Samoja ovat, siis diffyhtälö toteutuu. Entä alkuehdot:

```
> eval(subs(t=0,y1));eval(subs(t=0,y2));
```

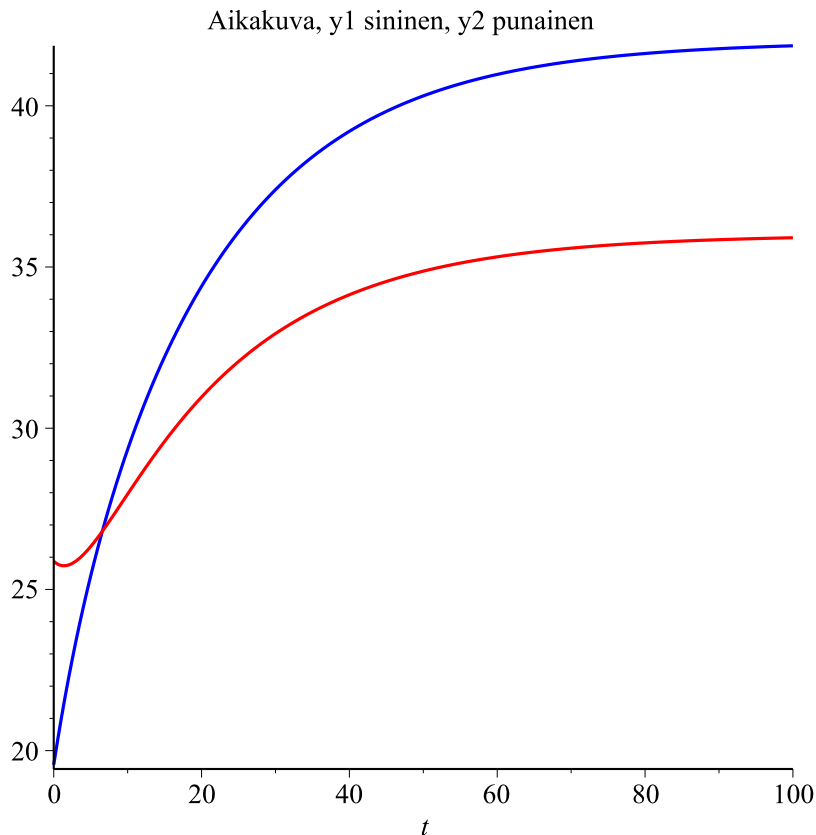
$$\frac{313}{16}$$
$$\frac{207}{8}$$

(3.17)

Kyllä vaan, siis oikein laskettu!

Nyt piirrokset:

```
> plot([y1,y2],t=0..100,color=[blue,red],title="Aikakuva, y1  
sininen, y2 punainen");
```



```
> plot([y1,y2],t=0..100],title="Faasikuva");
```

2x2-systeemejä, faasitasoja

```
> restart:  
> with(LinearAlgebra):with(linalg):with(plots):
```

Katsotaan ensin, mikä on "aikatason" ja faasitason suhde ja mikä on vastaava Maple-syntaksi. Merkitään havainnollisuuden vuoksi faasitason pisteitä $(x(t), y(t))$. Diffyhtälön $y'' + y = 0$ ratkaisukannan muodostavat $y1=\sin(t)$ ja $y2=\cos(t)$. (Mieluummin

merkittäisiin toisinpäin, mutta ...) Muunnetaan systeemiksi:
 $y_1=y$, $y_2=y' = y_1'$, siis:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

Tämän systeemin ratkaisuksi nähdään heti: $y_1=\sin(t)$, $y_2=\cos(t)$ (siksi ...)
Matriisimuodossa $Y'=A.Y$, missä

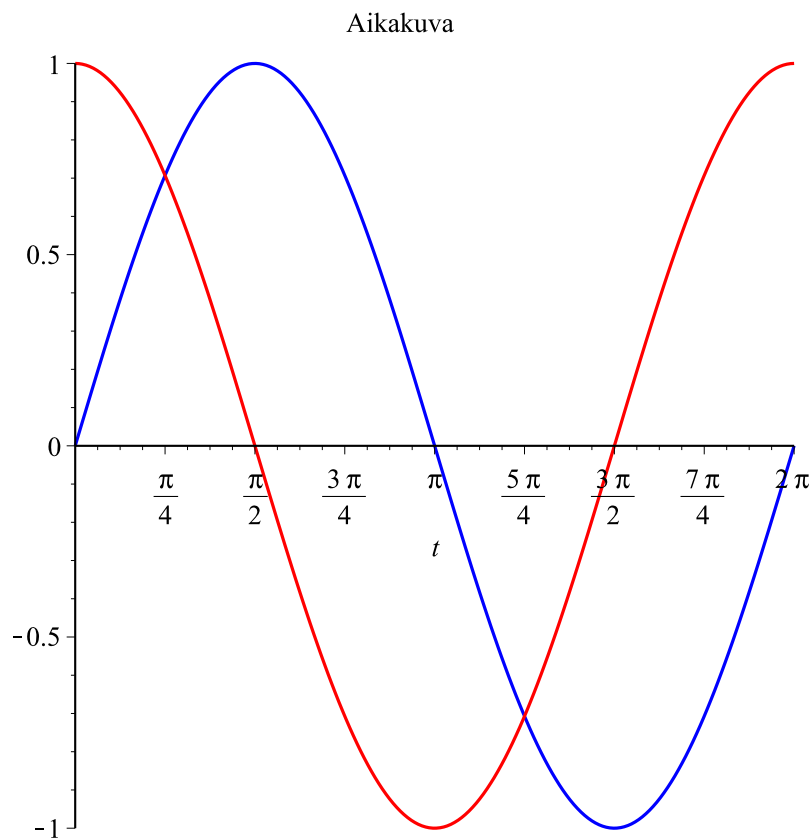
```
> A:=<<0|1>,<-1|0>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

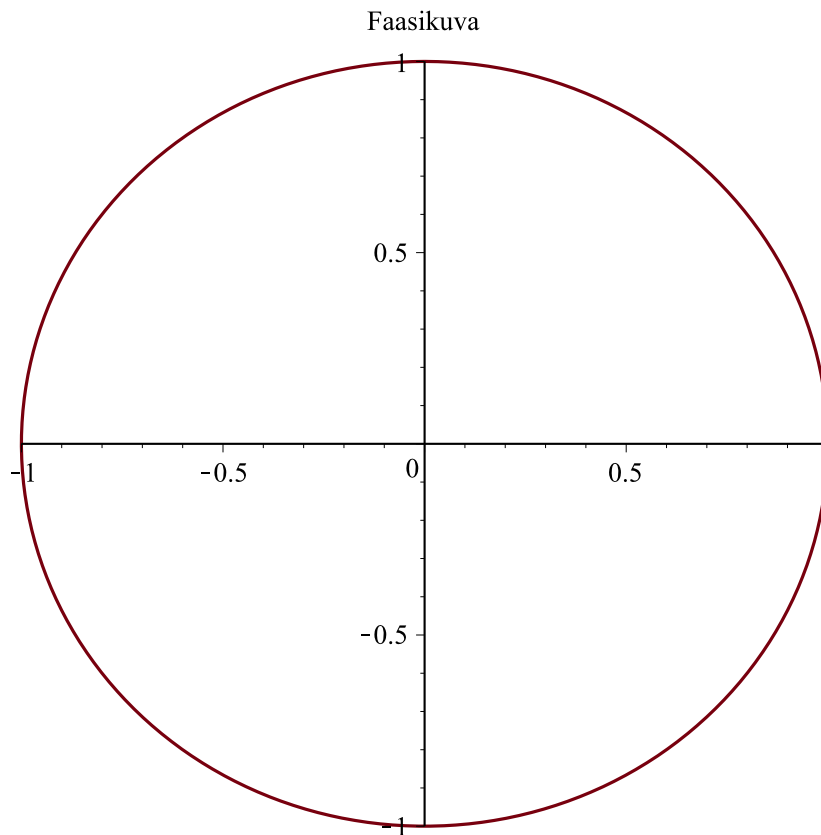
(4.1)

Olk. .

```
> x:=sin(t): y:=cos(t):  
> plot([x,y],t=0..2*Pi,title="Aikakuva",color=[blue,red]);
```



```
> faasi:=plot([x,y,t=0..2*Pi],title="Faasikuva"):display(faasi);
```



Suuntakenttä.

Lasketaan ja piirretään koordinaattiyksikkö pisteisiin trajektorin tangentin suuntanuolet (kasvavan t:n suuntaan)..

```
> pisteet := <<0,1> | <1,0> | <0,-1> | <-1,0>>;
```

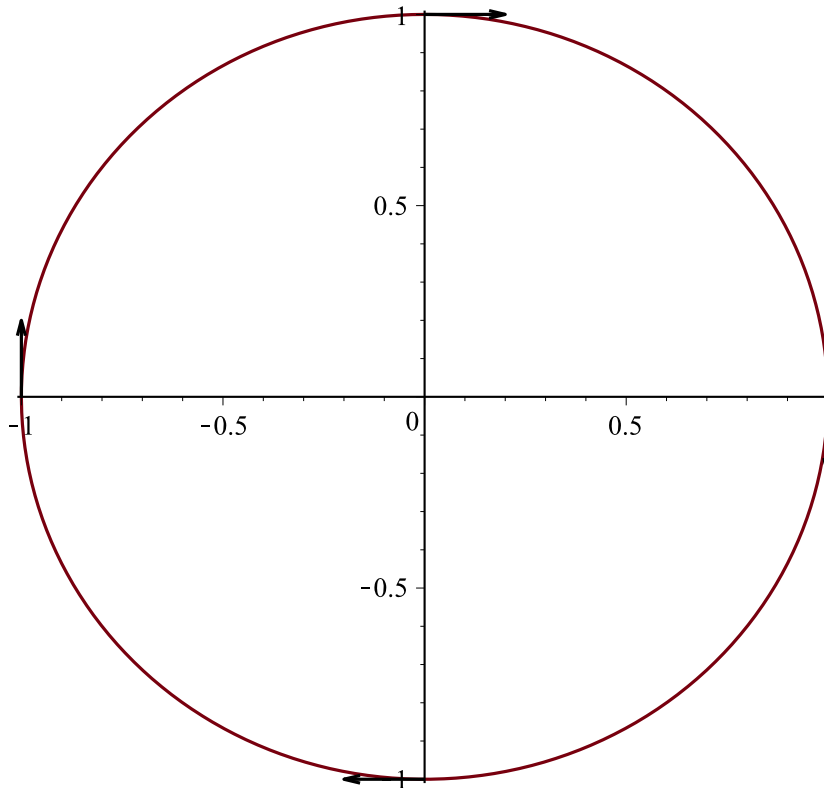
$$pisteet := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

```
> suunnat := A.pisteet;
```

$$suunnat := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

```
> display(faasi, seq(arrow(pisteet[1..2,i], 0.2*suunnat[1..2,i],  
shape=arrow), i=1..4));
```

Faasikuva



▼ Esim. 1 (KRE s. 163)

```
> restart: with(LinearAlgebra): with(linalg): with(plots):
> A:=<<-3,1>|<1,-3>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

```
> (lambda, ov):=Eigenvectors(A);
```

$$\lambda, ov := \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

```
> x1:=ov[1..-1,1]; x2:=ov[1..-1,2];
```

$$x1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4.1.3)

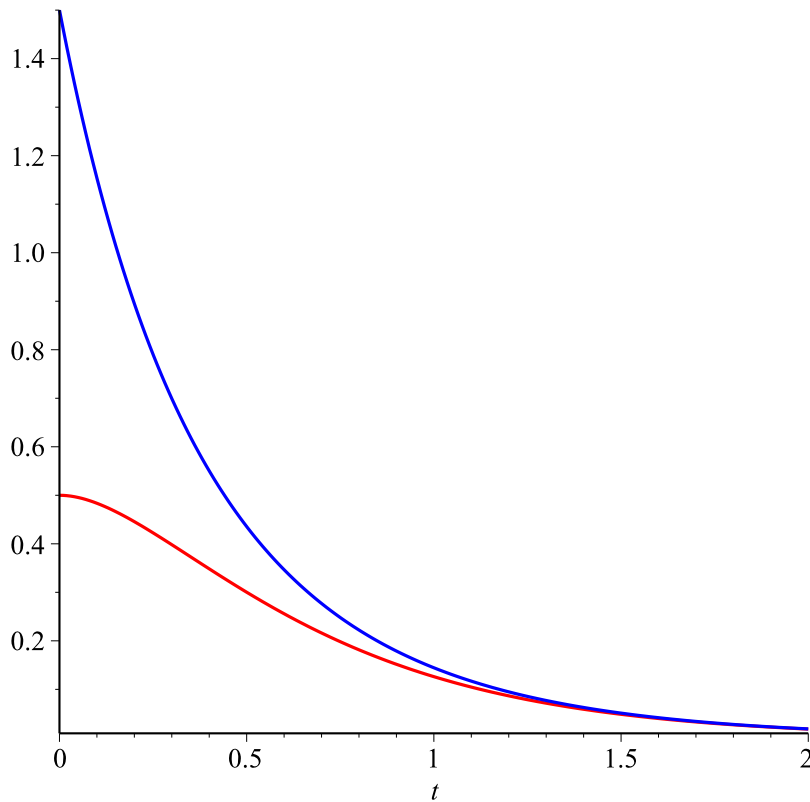
$$x2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

```
> Y:=C1*exp(lambda[1]*t)*x1+C2*exp(lambda[2]*t)*x2;
```

$$Y := \begin{bmatrix} C1 e^{-2t} - C2 e^{-4t} \\ C1 e^{-2t} + C2 e^{-4t} \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

```
> C1:=1: C2:=.5: plot([Y[1],Y[2]],t=0..2,title=
"Ratkaisufunktiot y1(t)ja y2(t) aikakuvassa",color=[red,
blue]);
```

Ratkaisufunktiot y1(t)ja y2(t) aikakuvassa



Faasikuvan piirtämistä ajatellen kannattaa katsoa taas ominaisvektorikantaa, Sekä käsin, että Maplella on helpompaa, jos otetaan käyräparametriksi

```
> s:=exp(-2*t);
```

$$s = e^{-2t} \quad (4.1.5)$$

```
> C1:='C1': C2:='C2':
```

```
> Ys:=C1*s^2*x1+C2*s*x2;
```

$$Y_s := \begin{bmatrix} C1 s^2 - C2 s \\ C1 s^2 + C2 s \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

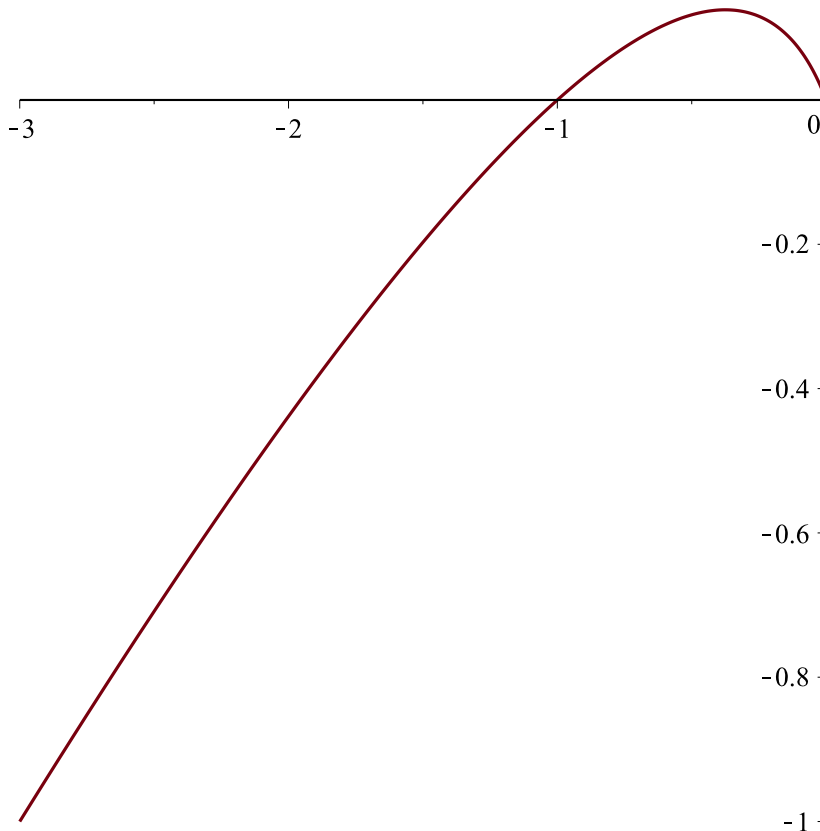
```
> YY:=evalm(YS);
```

$$YY := \begin{bmatrix} C1 s^2 - C2 s & C1 s^2 + C2 s \end{bmatrix} \quad (4.1.7)$$

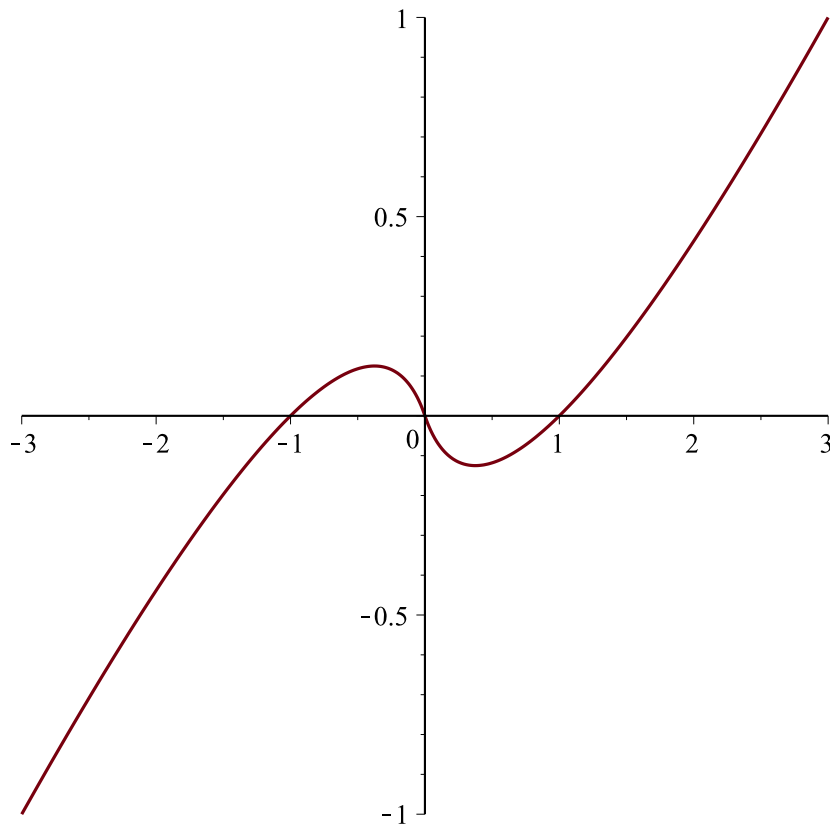
```
> C1:=arvo1: C2:=arvo2: 'plot'([YY[1],YY[2],s=a..b]); # Huomaa  
param. piirron syntaksi!
```

$$\text{plot}([arvo1 s^2 - arvo2 s, arvo1 s^2 + arvo2 s, s = a..b]) \quad (4.1.8)$$

```
> C1:=-2: C2:=1: plot([YY[1],YY[2],s=0..1]);kuva1:=%:
```



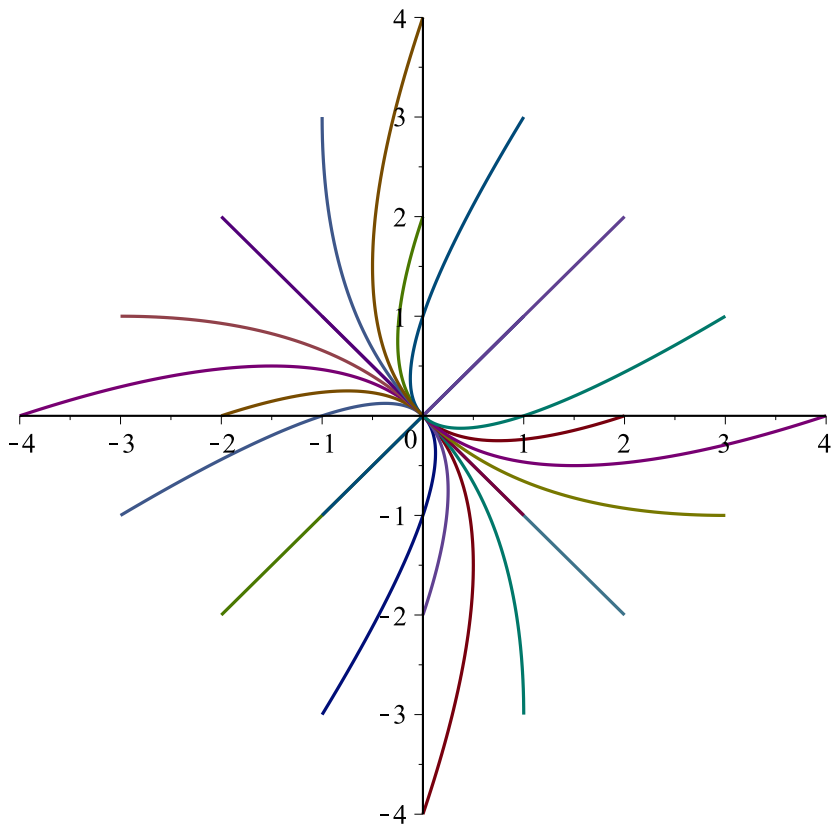
```
> C1:=2: C2:=-1: kuva2:=plot([YY[1],YY[2],s=0..1]):  
> display(kuva1,kuva2);
```



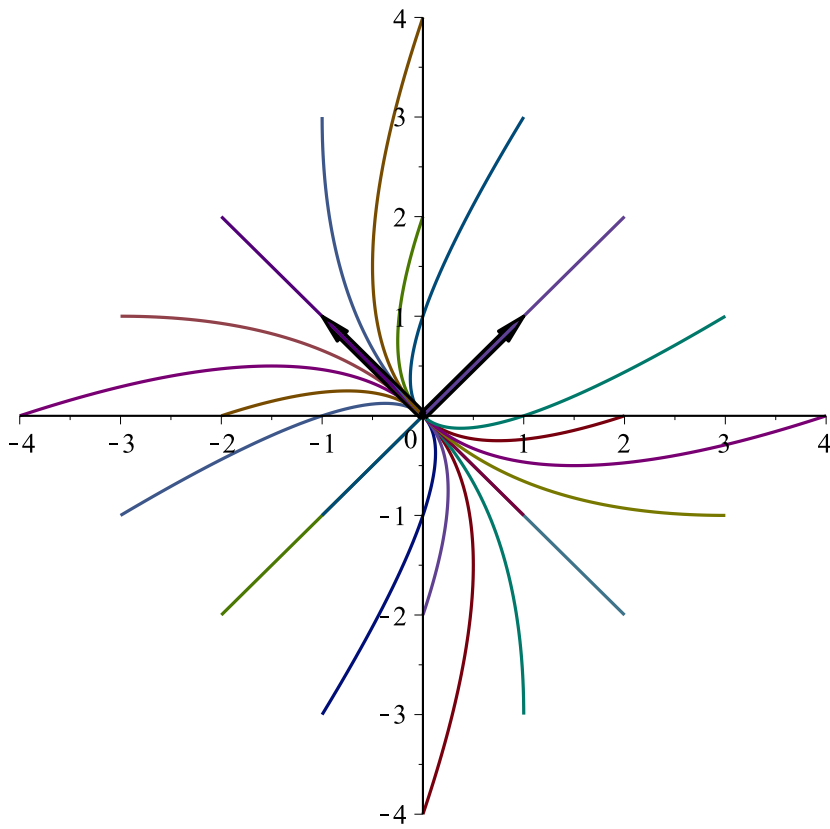
```

> C1:='C1': C2:='C2':
> parvi:=seq(seq([YY[1],YY[2],s=0..1],C2=-2..2),C1=-2..2);
parvi := [-2 s^2 + 2 s, -2 s^2 - 2 s, s = 0..1], [-2 s^2 + s, -2 s^2 - s, s = 0..1], [-2 s^2, (4.1.9)
-2 s^2, s = 0..1], [-2 s^2 - s, -2 s^2 + s, s = 0..1], [-2 s^2 - 2 s, -2 s^2 + 2 s, s = 0
..1], [-s^2 + 2 s, -s^2 - 2 s, s = 0..1], [-s^2 + s, -s^2 - s, s = 0..1], [-s^2, -s^2, s = 0
..1], [-s^2 - s, -s^2 + s, s = 0..1], [-s^2 - 2 s, -s^2 + 2 s, s = 0..1], [2 s, -2 s, s = 0
..1], [s, -s, s = 0..1], [0, 0, s = 0..1], [-s, s, s = 0..1], [-2 s, 2 s, s = 0..1], [s^2
+ 2 s, s^2 - 2 s, s = 0..1], [s^2 + s, s^2 - s, s = 0..1], [s^2, s^2, s = 0..1], [s^2 - s, s^2
+ s, s = 0..1], [s^2 - 2 s, s^2 + 2 s, s = 0..1], [2 s^2 + 2 s, 2 s^2 - 2 s, s = 0..1], [2 s^2
+ s, 2 s^2 - s, s = 0..1], [2 s^2, 2 s^2, s = 0..1], [2 s^2 - s, 2 s^2 + s, s = 0..1], [2 s^2
- 2 s, 2 s^2 + 2 s, s = 0..1]
> plot([parvi]);

```



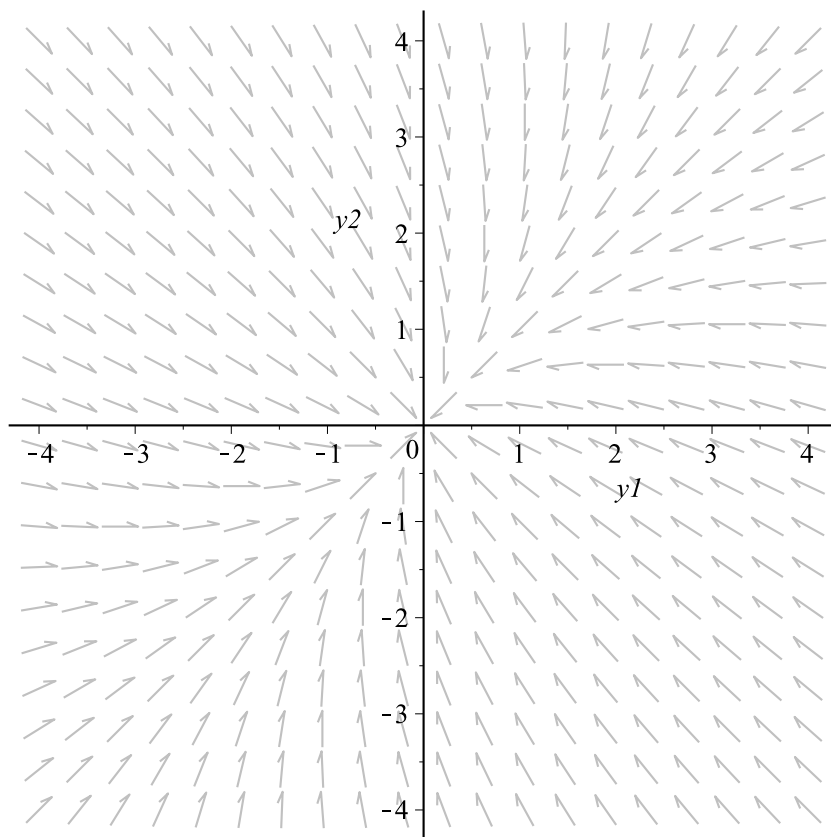
```
> display(%,arrow([x1,x2]));
```



```

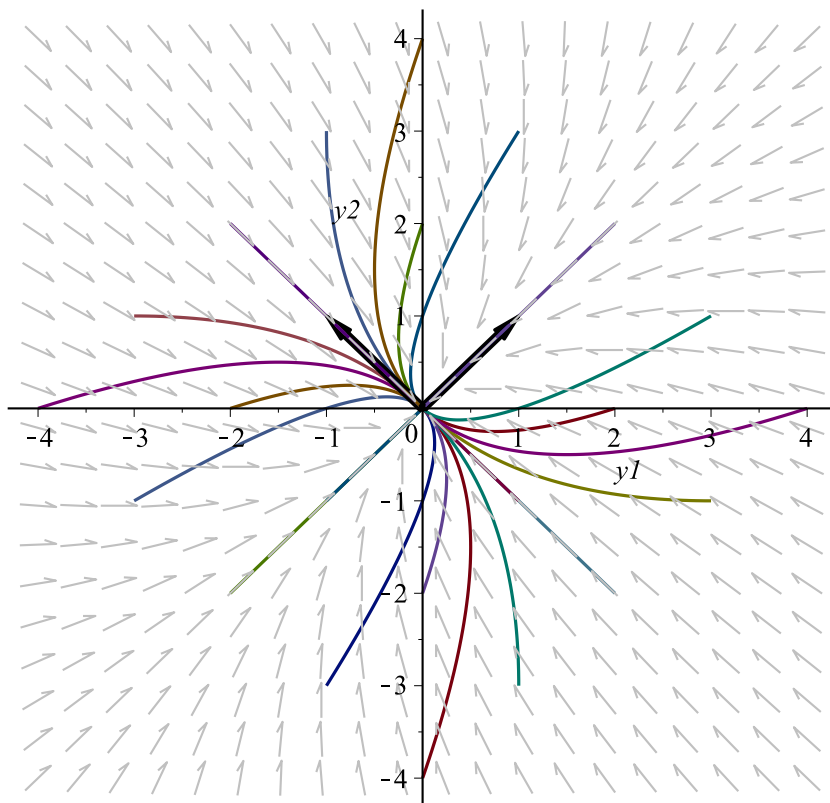
> kuva:=%:
> with(DEtools):
> DEplot([D(y1)(t)=-3*y1(t)+y2(t),D(y2)(t)=y1(t)-3*y2(t)],
[y1(t),y2(t)],t=-5..2,y1=-4..4,y2=-4..4,color=grey);

```



```
> display(kuva,%,title="Trajektoreita ja suuntakenttä");
```

Trajektoreita ja suuntakenttä



2x2-faasitasotyypit

KRE:ssä on perusesimerkkejä ss. 164 - 168.

Käydään tässä EN:n sivujen mukaan ja käytetään EN-nimityksiä

[EN]: Eirola-Nevalinna: Diff. yht. sys. L3-luentoja

Esim. 2.2 Lähde, ominaisarvot > 0

```
> restart: with(LinearAlgebra): with(linalg): with(plots):
> A:=<<1,0>|<1,2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(5.1.1)

```
> (lambda, ov):=Eigenvectors(A);
```

$$\lambda, ov := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.1.2)

```
> v1:=ov[1..-1,1]; v2:=ov[1..-1,2];
```

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5.1.3)

```
> C:='C1': C:='C2':
```

```
> y:=t->C1*exp(lambda[1]*t)*v1+C2*exp(lambda[2]*t)*v2;
```

$$y := t \rightarrow C1 e^{\lambda_1 t} v1 + C2 e^{\lambda_2 t} v2$$

(5.1.4)

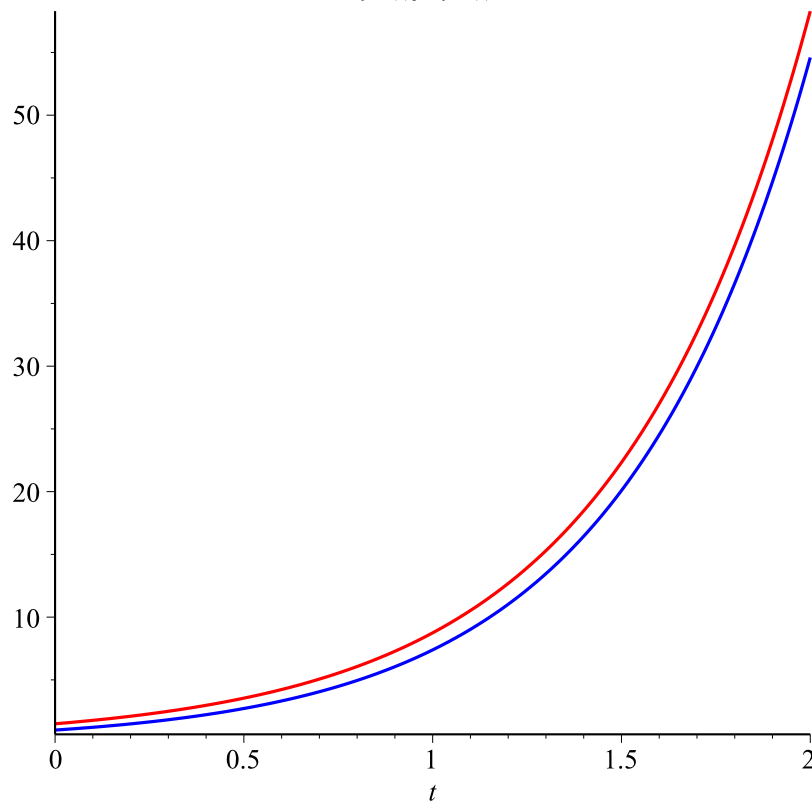
```
> Y:=y(t);
```

$$Y := \begin{bmatrix} C1 e^{2t} + C2 e^t \\ C1 e^{2t} \end{bmatrix}$$

(5.1.5)

```
> C1:=1: C2:=.5: plot([Y[1],Y[2]],t=0..2,title=
"Ratkaisufunktiot y1(t)ja y2(t) aikakuvassa",color=[red,
blue]);
```

Ratkaisufunktiot y1(t)ja y2(t) aikakuvassa



```
> C1:='C1': C2:='C2':
```

```
> Ys:=map(eval,subs(t=log(s),y(t)));
```

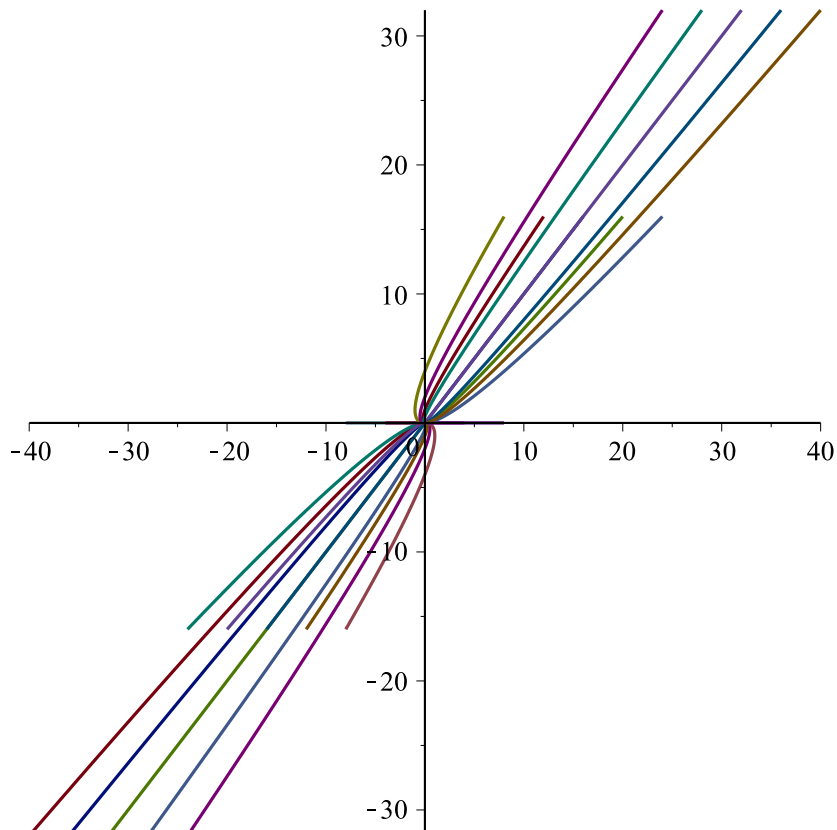
$$Y_s := \begin{bmatrix} C1 s^2 + C2 s \\ C1 s^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.6)$$

```
> YY:=evalm(Ys);
```

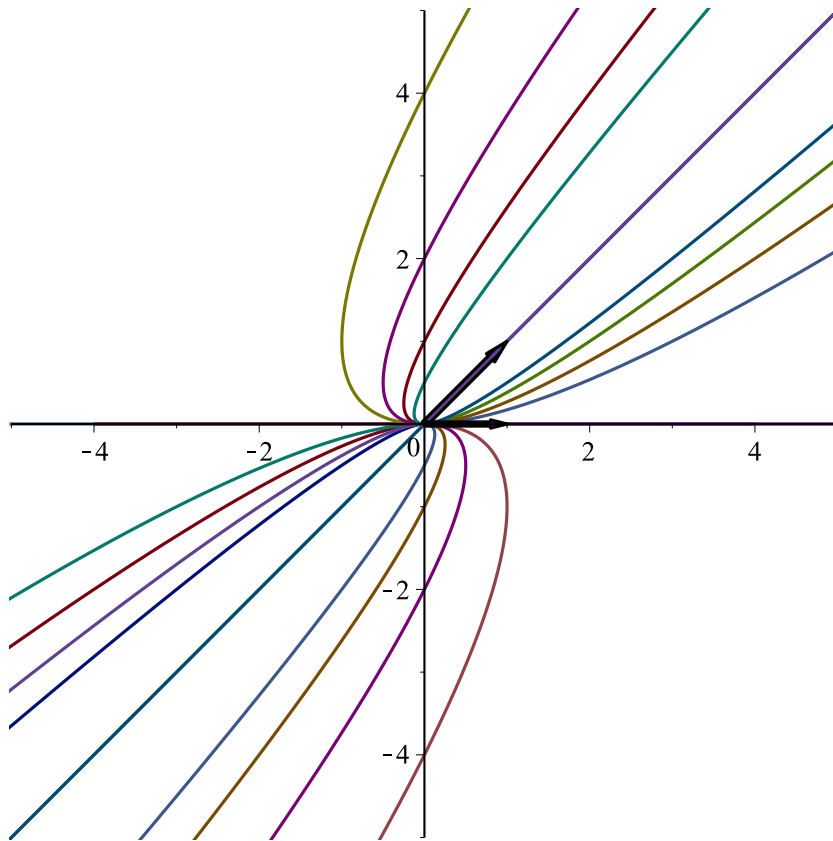
$$YY := \begin{bmatrix} C1 s^2 + C2 s & C1 s^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.7)$$

```
> parvi:=seq(seq([YY[1],YY[2],s=0..4],C2=-2..2),C1=-2..2):
```

```
> plot([parvi]);
```



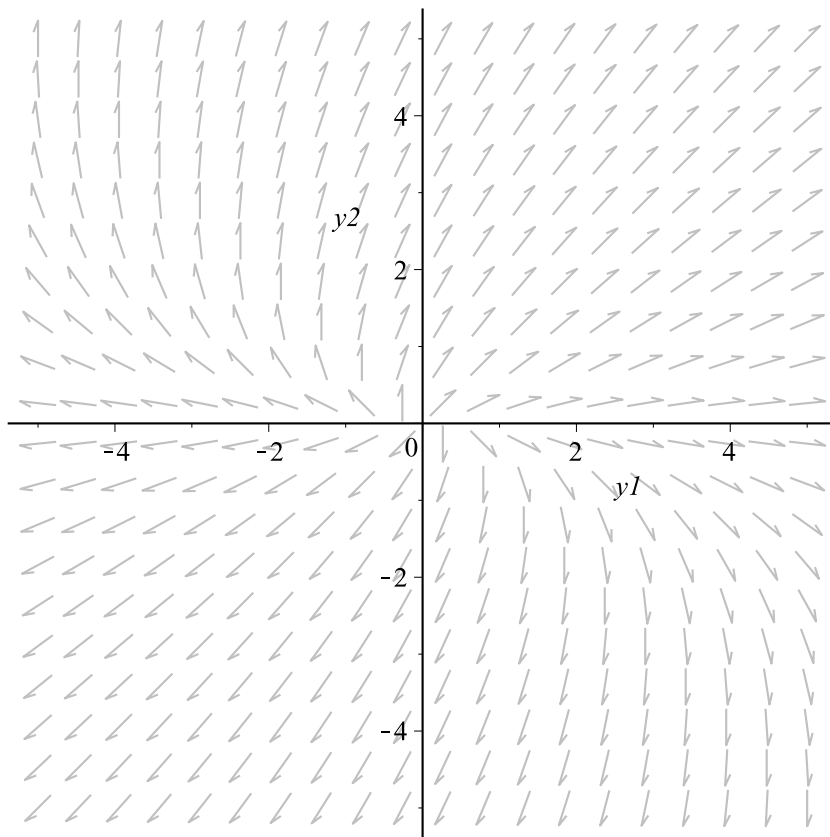
```
> display(%,arrow([v1,v2]),view=[-5..5,-5..5]);
```



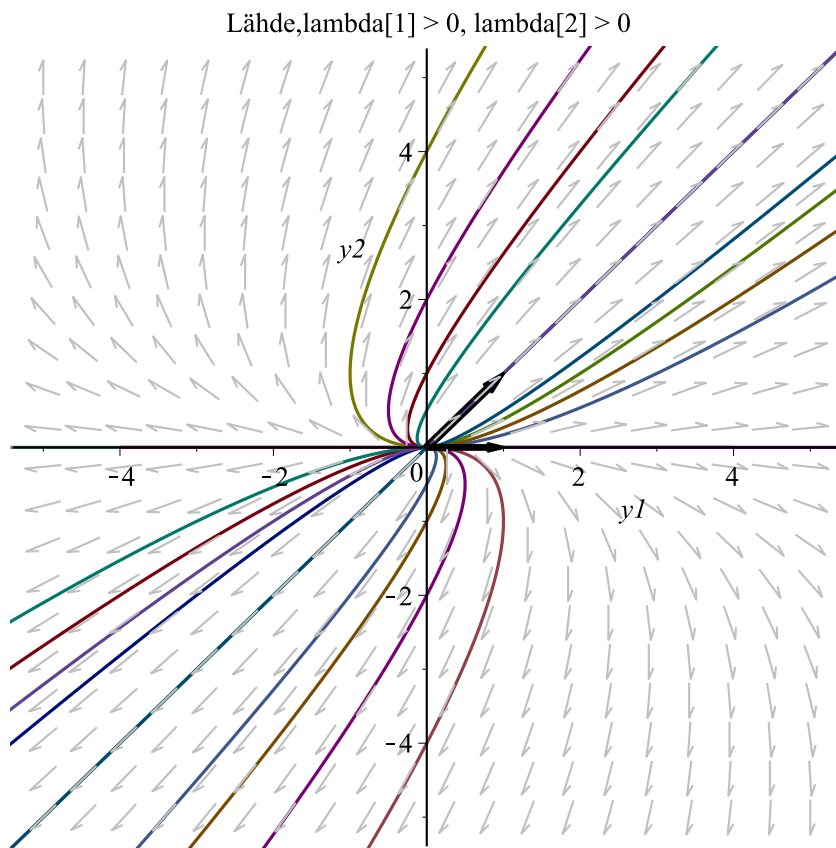
```

> kuva:=%:
> with(DEtools):
> DEplot([D(y1)(t)=y1(t)+y2(t),D(y2)(t)=2*y2(t)],
[y1(t),y2(t)],t=-5..2,y1=-5..5,y2=-5..5,color=grey);

```



```
> display(kuva,%,title="Lähde,lambda[1] > 0, lambda[2] > 0");
```



▼ Esim. 2.3, Nielu, ominaisarvot < 0

Periaatteessa samanlainen kuin lähde edellä, mutta nyt ominaisarvot negatiiviset. Trajektorit virtaavat origoon.

```
> A:=<<-2, -1>|<-1, -2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

```
> (lambda, ov):=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda, ov := \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

```
> v1:=ov[1..-1,1]; v2:=ov[1..-1,2];
```

$$v1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(5.2.3)

$$v2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

```
> C1:='C1': C2:='C2':
```

```
> y:=t->C1*exp(lambda[1]*t)*v1+C2*exp(lambda[2]*t)*v2;
```

$$y := t \rightarrow C1 e^{\lambda_1 t} v1 + C2 e^{\lambda_2 t} v2 \quad (5.2.4)$$

```
> subs(t=log(s),y(t)): Ys:=eval(%); # Siirrytään logaritmiseen
parametriin. Tämä ei ole välttämätöntä, mutta helpottaa
erit. käsin piirtoa, myös Maple-piirroksessa skaala pysyy
paremmin hanskassa.
```

$$Ys := \begin{bmatrix} -\frac{C1}{s} + \frac{C2}{s^3} \\ \frac{C1}{s} + \frac{C2}{s^3} \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

```
> # 0 < s < 1, kun t > 0.
```

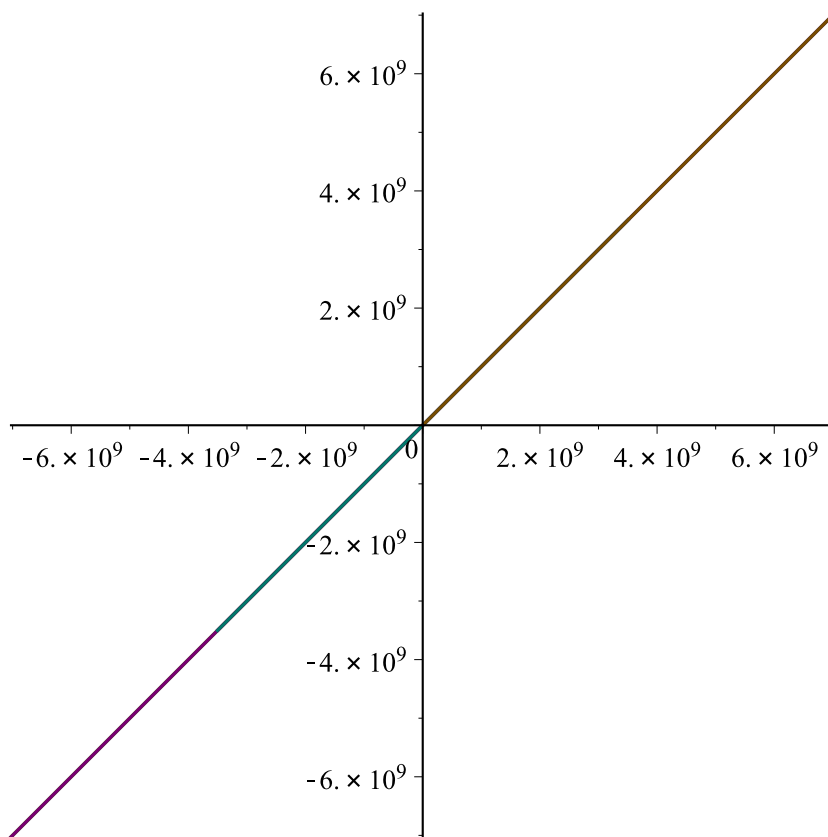
```
Lasketaan koordinaattimuodossa:
```

```
> YY:=evalm(Ys);
```

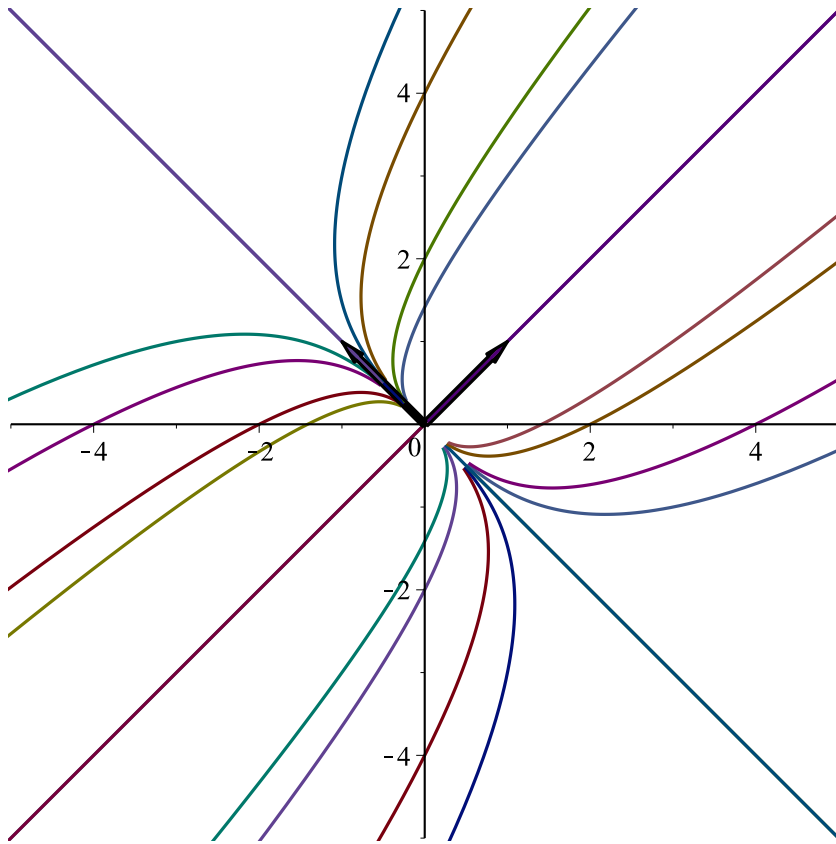
$$YY := \begin{bmatrix} -C1 e^{-\ln(s)} + C2 e^{-3 \ln(s)} & C1 e^{-\ln(s)} + C2 e^{-3 \ln(s)} \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

```
> parvi:=seq(seq([YY[1],YY[2],s=0..4],C2=-2..2),C1=-2..2):
```

```
> plot([parvi]);
```



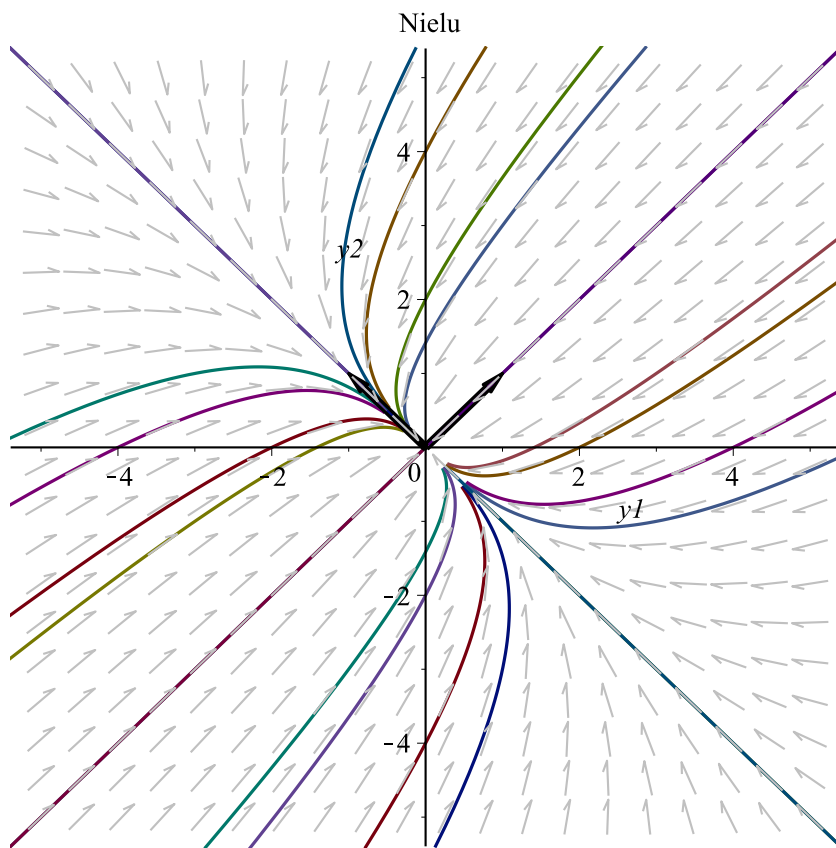
```
> display(%,arrow([v1,v2]),view=[-5..5,-5..5]);
```



```

> kuva:=%;
> with(DEtools):
> display(kuva, DEplot([D(y1)(t)=-2*y1(t)-y2(t), D(y2)(t)=-y1(t)
-2*y2(t)],
[y1(t), y2(t)], t=-5..2, y1=-5..5, y2=-5..5, color=grey), title=
"Nielu");

```



Nielu on vahvasti stabiili. Kaikki trajektorit lähestyvät O:a, kun $t \rightarrow \infty$.

▼ Esim 2.4 Satula, reaaliset, erimerkk.

> $A := \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

(5.3.1)

> $(\lambda, ov) := \text{Eigenvectors}(A)$;

$$\lambda, ov := \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5.3.2)

> $v1 := ov[1..-1, 1]$; $v2 := ov[1..-1, 2]$;

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

```
> C1:='C1': C2:='C2':  
> Y:=C1*exp(lambda[1]*t)*v1+C2*exp(lambda[2]*t)*v2;
```

$$Y := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} C1 e^{-2t} - C2 e^{3t} \\ C1 e^{-2t} + C2 e^{3t} \end{bmatrix} \quad (5.3.4)$$

```
> subs(t=log(s),Y);Ys:=eval(%);
```

$$Y_s := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \frac{C1}{s^2} - C2 s^3 \\ \frac{C1}{s^2} + C2 s^3 \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

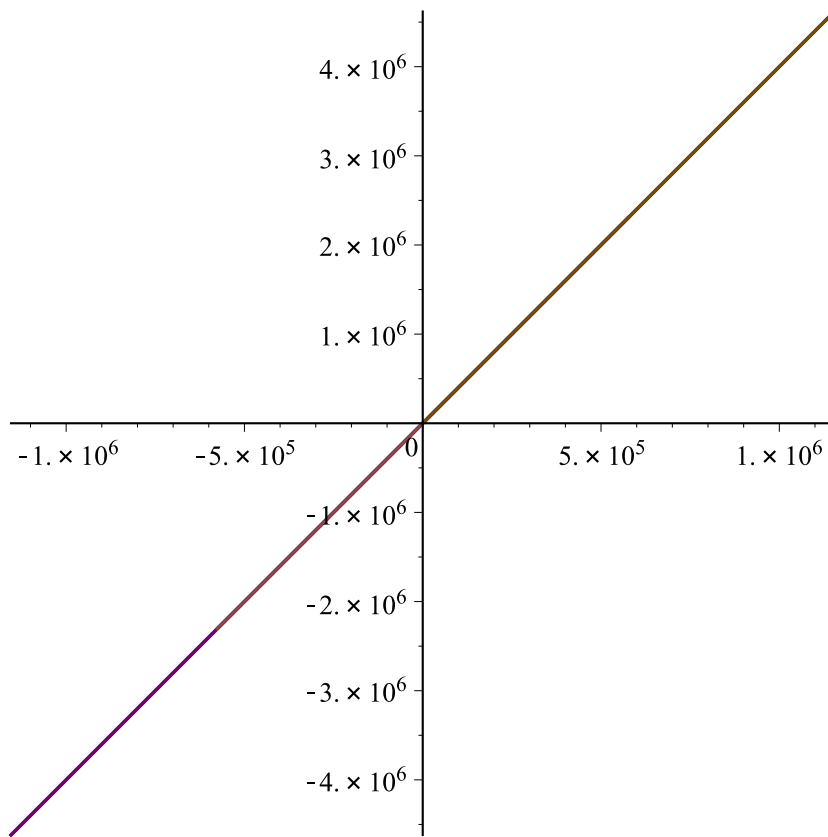
```
> # 0 < s < 1, kun t > 0
```

```
> YY:=evalm(Ys);
```

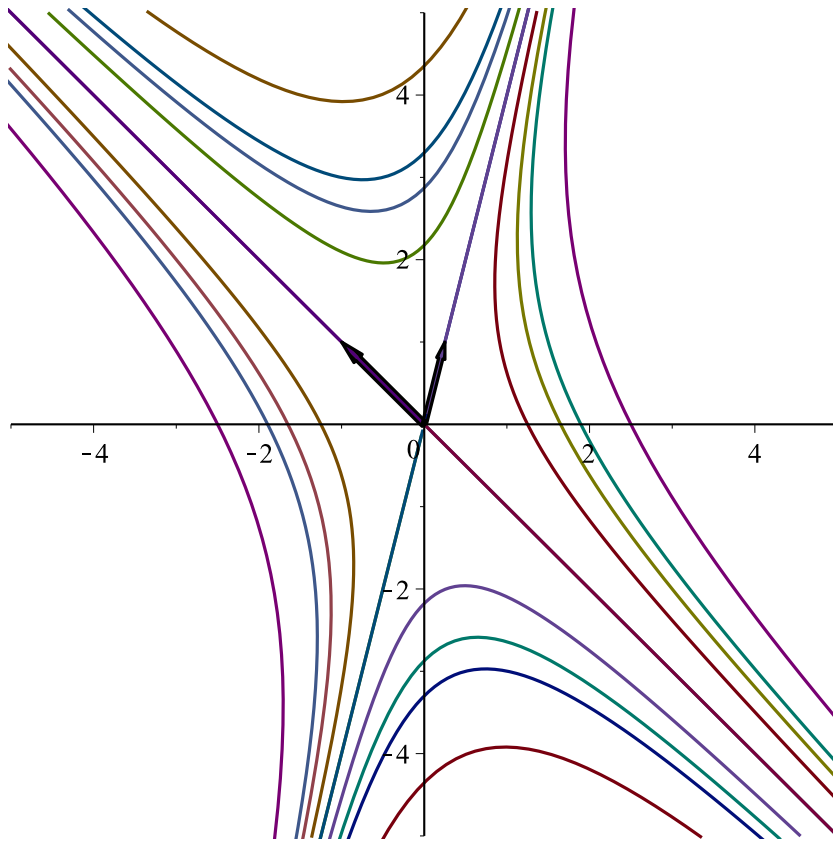
$$YY := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} C1 e^{-2 \ln(s)} - C2 e^{3 \ln(s)} & C1 e^{-2 \ln(s)} + C2 e^{3 \ln(s)} \end{bmatrix} \quad (5.3.6)$$

```
> parvi:=seq(seq([YY[1],YY[2],s=0..4],C2=-2..2),C1=-2..2):
```

```
> plot([parvi]);
```



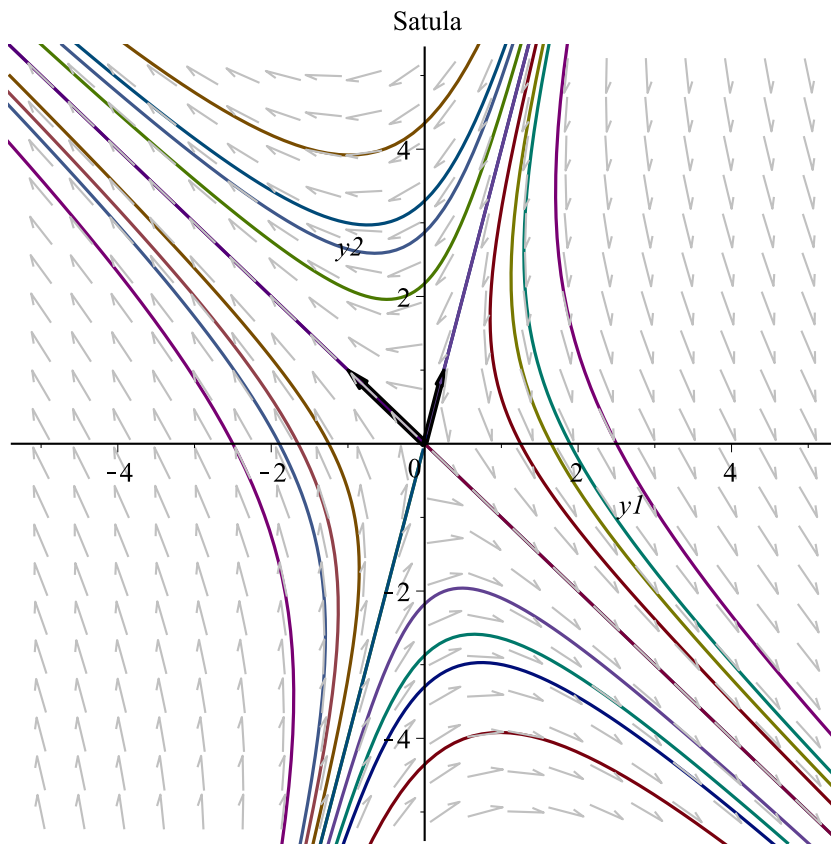
```
> display(%,arrow([v1,v2]),view=[-5..5,-5..5]);
```



```

> kuva:=%;
> with(DEtools):
> display(kuva, DEplot([D(y1)(t)=2*y1(t)-y2(t), D(y2)(t)=-4*y1
  (t)-y2(t)],
  [y1(t), y2(t)], t=-5..2, y1=-5..5, y2=-5..5, color=grey), title=
  "Satula");

```



Epästabiili. Osa trajektoreista $\rightarrow \infty$, lähdettiinpä miten läheltä O:a tahansa (erit. posit. ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin pisteistä).

Esim. 2.5, epästabiili fokus , kompleksiset, $\text{Re}(\lambda) > 0$

> $A := \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$;

$$A := \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 16 & -7 \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

> $(\lambda, ov) := \text{Eigenvectors}(A)$;

$$\lambda, ov := \begin{bmatrix} 1 + 8I \\ 1 - 8I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.2)$$

> $v1 := ov[1..-1, 1]$; $v2 := ov[1..-1, 2]$;

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.3)$$

> C1:='C1': C2:='C2':

> Y:=C1*exp(lambda[1]*t)*v1+C2*exp(lambda[2]*t)*v2;

$$Y := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I \right) C1 e^{(1+8I)t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I \right) C2 e^{(1-8I)t} \\ C1 e^{(1+8I)t} + C2 e^{(1-8I)t} \end{bmatrix} \quad (5.4.4)$$

> alpha:=Re(lambda[1]);

$$\alpha := 1 \quad (5.4.5)$$

> beta:=Im(lambda[1]);

$$\beta := 8 \quad (5.4.6)$$

> u:=map(Re,v1); v:=map(Im,v1);

$$u := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(5.4.7)$$

> uv:=<u|v>;

$$uv := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(5.4.8)$$

> C:=<<cos(beta*t),-sin(beta*t)>|<sin(beta*t),cos(beta*t)>>;

$$C := \begin{bmatrix} \cos(8t) & \sin(8t) \\ -\sin(8t) & \cos(8t) \end{bmatrix}$$

$$(5.4.9)$$

> Y:=exp(alpha*t)*(uv.C.<C1,C2>); # Sulut laitettava näin, Maple ei täysin hallitse kertolaskujen liitännäisyyttä.

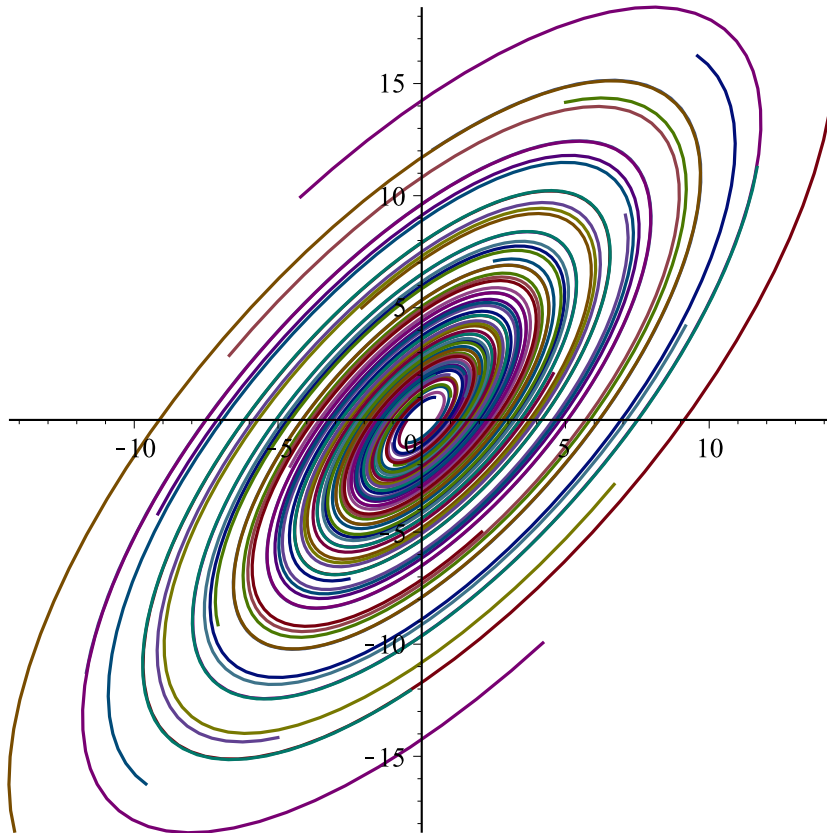
$$Y := \begin{bmatrix} e^t \left(\left(\frac{1}{2} \cos(8t) - \frac{1}{2} \sin(8t) \right) C1 + \left(\frac{1}{2} \sin(8t) + \frac{1}{2} \cos(8t) \right) C2 \right) \\ e^t (\cos(8t) C1 + \sin(8t) C2) \end{bmatrix} \quad (5.4.10)$$

> YY:=evalm(Y);

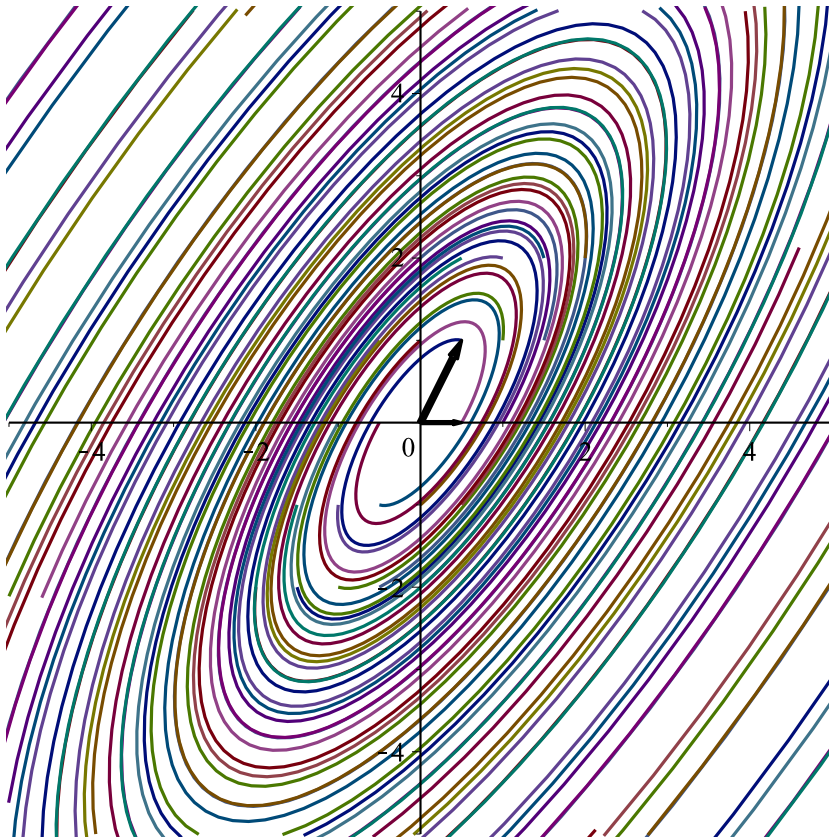
$$YY := \begin{bmatrix} e^t \left(\left(\frac{1}{2} \cos(8t) - \frac{1}{2} \sin(8t) \right) C1 + \left(\frac{1}{2} \sin(8t) + \frac{1}{2} \cos(8t) \right) C2 \right) \\ e^t (\cos(8t) C1 + \sin(8t) C2) \end{bmatrix}, \quad (5.4.11)$$

$$e^t (\cos(8t) C1 + \sin(8t) C2)$$

```
> parvi:=seq(seq([YY[1],YY[2],t=0..2],C2=-2..2),C1=-2..2):
> plot([parvi]);
```



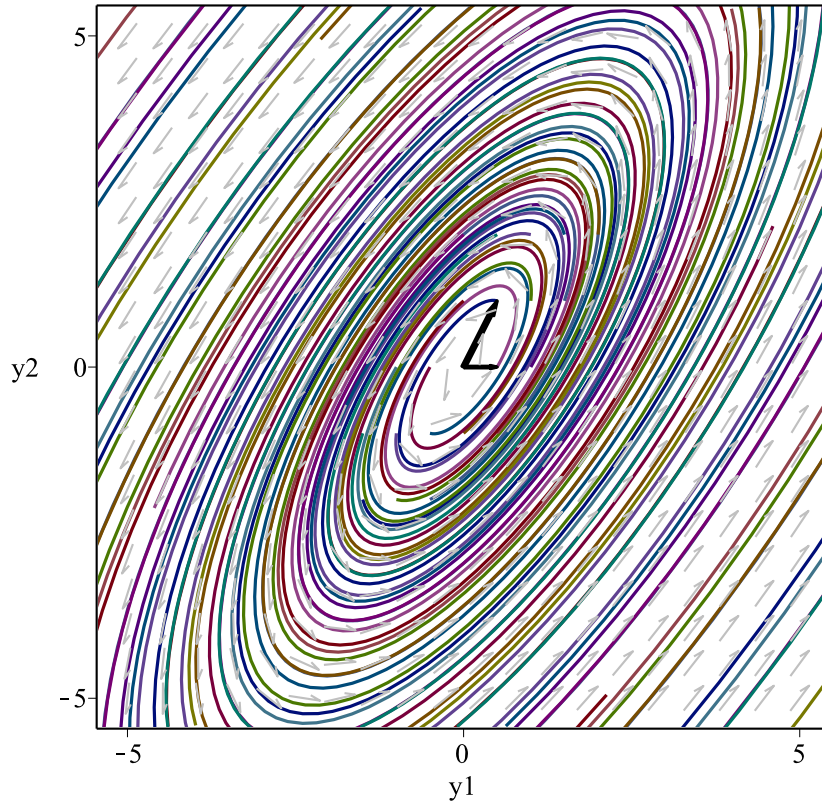
```
> display(%,arrow([u,v]),view=[-5..5,-5..5]);
```



```

> kuva:=%;
> with(DEtools):
> display(kuva, DEplot([D(y1)(t)=9*y1(t)-8*y2(t), D(y2)(t)=16*y1
  (t)-7*y2(t)],
  [y1(t), y2(t)], t=-5..2, y1=-5..5, y2=-5..5, color=grey), title=
  "", thickness=1, tickmarks=[3, 3], labels=["y1", "y2"], axes=box);

```



▼ Esim. 3.0 Degeneroitununut lähde (KRE s. 168)

```
> A:=<<4, -1>|<1, 2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(5.5.1)

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.5.2)

```
> E:=Matrix(exponential(A*t));
```

$$E := \begin{bmatrix} e^{3t} + t e^{3t} & t e^{3t} \\ -t e^{3t} & e^{3t} - t e^{3t} \end{bmatrix}$$

(5.5.3)

```
> y:=c1*E[1..-1,1]+c2*E[1..-1,2];
```

(5.5.4)

$$y := \begin{bmatrix} c1 (e^{3t} + t e^{3t}) + c2 t e^{3t} \\ -c1 t e^{3t} + c2 (e^{3t} - t e^{3t}) \end{bmatrix} \quad (5.5.4)$$

```
> y:=Matrix(E).<C1,C2>;
```

$$y := \begin{bmatrix} (e^{3t} + t e^{3t}) C1 + t e^{3t} C2 \\ -t e^{3t} C1 + (e^{3t} - t e^{3t}) C2 \end{bmatrix} \quad (5.5.5)$$

```
> YY:=evalm(Y);
```

$$YY := \begin{bmatrix} e^t \left(\left(\frac{1}{2} \cos(8t) - \frac{1}{2} \sin(8t) \right) C1 + \left(\frac{1}{2} \sin(8t) + \frac{1}{2} \cos(8t) \right) C2 \right), \\ e^t (\cos(8t) C1 + \sin(8t) C2) \end{bmatrix} \quad (5.5.6)$$

```
> parvi:=seq(seq([YY[1],YY[2],t=-2..2],C2=-2..2),C1=-2..2):
```

```
> display(plot([parvi]),arrow(<-1,1>),view=[-5..5,-5..5],
title="",thickness=1,tickmarks=[3,3],labels=["y1","y2"],
axes=box);
```

