-e

mlMatriisit

1. Potenssimenetelmä on eräs keino löytää magnitudiltaan isoin ominaisarvo ja -vektori. Menetelmä toimii seuraavasti:

- Valitse alkuarvaus $\mathbf{b}_0$. Ainoa vaatimus on, että tällä vektorilla on nollastapoikkeava komponentti ominaisarvon suuntaan – käytännössä kannattaa valita vektori, jonka jokainen alkio on nollasta poikkeava.
- Aseta
$$\mathbf{b}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{b}_k}{||\mathbf{A}\mathbf{b}_k||}$$
- Jatka kunnes jono $(\mathbf{b}_k)$ suppenee. Ominaisarvo $\lambda = ||\mathbf{A}\mathbf{b}_k||$ ja vektori $\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$.

Toteuta menetelmä MATLABissä, ja laske matriisin `gallery(5)` isoin ominaisarvo ja -vektori. Testaa tuloksen oikeellisuus.

Vihje:

2. Tehdään LU-hajotelma tuentaa hyväksikäyttäen. Ensimmäiseksi, yritetään ymmärtää, kuinka tuenta toimii seuraavan pseudokoodin avulla.

[Kommentoitu pois codebox-osuus]

Kirjoita vastaava MATLAB-funktio, ja ratkaise sen avulla ongelma $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 29 \\ 21 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

Kokeile sitten ratkaista ongelma $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kun $\mathbf{A}$ on 18×18 Hilbertin matriisi, ja $\mathbf{b} = \mathbf{A}[1]_{18}$,

Vihje:

Hilbertin matriisi MATLABina:

```
A = hilb(18);
b = A*ones(18,1);
```

3. Gram-Schmidtin menetelmä vektorijoukon $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormalisoimiseksi toimii seuraavasti:

- Ortogonalisoidaan:
  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$

  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v_2}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$

  $\vdots$

  $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v_n}}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k$

- Normitetaan: $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{||\mathbf{u}_i||}, i = 1 \dots n$

Kirjoita MATLAB-funktio `B = grmsch(A)` joka hakee Gram-Schmidtin menetelmällä ortonormaalin kannan matriisin $\mathbf{A}$ sarakeavaruudelle. Testaa ortonormaalius laskemalla `B'*B`.

Vinkki: Laskutoimitus $\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v_n}}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k$ vastaa toimitusta $(\mathbf{u}_k^T \mathbf{v}_n)\mathbf{u}_k$. **Lisätehtävä nopeille:** Matriisin sarakeavaruuden normalisointi ei poikkea kovin paljon QR-hajotelman tekemisestä. Jos ehdit, toteuta oma algoritmisi QR-hajotelmalle.

Vihje:

4. Matriisi $(a_{ij}) = \mathbf{A} \in \mathrm{R}^{n \times m}$ on *yläkolmiomatriisi*, jos $a_{ij} = 0$ kun $i > j$.
(a)Kirjoita MATLAB funktio, joka ratkaiseen yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kun $\mathbf{A}$ on yläkolmiomatriisi.
(b) Generoi satunnaisia yläkolmiomatriiseja, ja tutki josko

(1) kahden yläkolmiomatriisin tulo on aina yläkolmiomatriisi,

(2) yläkolmiomatriisin käänteismatriisi on aina yläkolmio.

(3) determinantti on aina nollastapoikkeava.

Vihje: Satunnaisia matriiseje voi luoda kommennoilla `rand` ja `randn`. Näitä kertomalla saa matriiseja joiden arvot ovat millä vain halutulla välillä. Yläkolmion saa matriisista $\mathbf{A}$ komennolla `triu(A)`.

5.

Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Laske matriisin $\mathbf{A}$ diagonalisointiin tarvittavat matriisit P ja D.

b) Varmista, että P on ortogonaalinen, ja D on diagonaalinen ja diagonaalialkiot suuruusjärjestyksessä.

c) Osoita, että spektraalikaava

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T = A$$

Vihje: