-e

mlFunktiot

1. Jos f on analyyttinen, sille pätee Cauchyn integraalikaava, josta muuttujanvaihdolla saadaan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0-re^{it})}{z_0+re^{it}-z_0}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z0+re^{it})dt.$$

Gaussin keskiarvoperiaatteen nojalla analyyttisen funktion arvo pisteessä z_0 on laskettavissa ottamalla integraalikeskiarvo reunan ylitse. Intuitiivisesti keskiarvo on aina arvojen maksimin alapuolella.

Tätä ajatusta noudattaen päästään seuraavaan: olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ ei-vakio analyyttinen funktio alueessa U. Tällöin $z \mapsto |f(z)|$ ei periaatteen mukaan saavuta suurinta arvoaan alueessa U. Tutkitaan asiaa kokeellisesti:

1. Piirrä funktion $f(z) = |e^z|$ kuvaaja alueessa $[-1,1]\times[-i,i]$.
2. Piirrä funktion $f(z) = |\log(z)|$ kuvaaja alueessa $[1,10]\times[i,10i]$
3. Tutki vielä kuvauksen $z \mapsto |z^3|$ käyttäytymistä alueessaa $[-1,1]\times[-i,i]$.

Kuinka maksimiperiaate ilmenee näiden funktioiden tapauksessa?

Maksimiperiaate pätee myös harmonisille funktioille: jos $f = u + iv$ on analyyttinen funktio, joka (vähintään lokaalisti) saadaan annetusta harmonisesta funktiosta u, niin funktion

$$F(z) = e^{f(z)}$$

avulla saadaan maksimiperiaate pätemään funktiolle u, sillä $|F(z)| = e^u$. Tutki maksimiperiaatten toteutumista eksponenttifunktion reaali- ja imaginääriosille seuraavasti:

```
t  = -1:0.1:1;
[x, y] = meshgrid(t,t);
u = exp(x).*cos(y);
mesh(x,y,u);
v = exp(x).*sin(y);
mesh(x,y,v)
```

Vihje:

2. On esitetty, että jatkuva funktio $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, joka toteuttaa ehdot

1. $f(2x) = 2f(x)$, and
2. $f(1) = c$

on aina muotoa $f(x) = cx$. Tälle on kuitenkin esitetty seuraava vastaesimerkki:

$$f(x) = 2^{-n}x^2 + 2^{n+1}, x \in [2^n, 2^{n+1}),$$

$n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Kirjoita funktio f MATLABissa ja piirrä sen kuvaaja.

Vihje: Tehtävän tarkoitus on opastaa MATLABin katto- ja lattiafunktioiden käytössä. Nämä ovat nimeltään `floor` ja `ceil` - katso tarkempia tietoja MATLABin helpistä.