Aalto-yliopisto

Matemaattiset ohjelmistot MS-E1999

4. luennon tehtävät

Tehtävät ovat Maplea ja Matlabia, nyt valmiit!

Lievennyksiä aikatauluihin.
Palauta kustakin harjoitustehtävistä Maplen "Export->pdf" valinnalla (tai MATLABin `publish`-toiminnolla) julkaistu pdf-dokumentti kurssin Moodle-sivulle
Lisäksi lähdekoodit .m ja .mw, jälkimmäisestä miellään "Remove output"

Kurssin Moodlen rekisteröitymisavain on **matapp122**

Kurssin tehtävistä suurin osa on poimittu laitoksen tietokenmatematiikan sivustolta http://math.aalto.fi/opetus/Mattie/MattieT/html.
Kääntäen, tämänkin kurssin yhteydessä kehitettävät uudet tehtävät ratkaisuineen, vihjeineen ym. siirtyvät samantien *Mattie*-kokoelmaan.

Tiivis Maple-komentokooste:
http://math.aalto.fi/opetus/MatOhjelmistot/2012kevat/maple/pikamaple.pdf.

Timo Mäkelän Maple-opas (viimeksi ei auennut), kannattaa lukea!
https://sites.google.com/site/laskenta/maple

Tehtävät

1. mlLA022.tex -> MattieT/mlLinalg ja mplLinalg
   Matriisin ominaisarvot ovat karakterisisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = 0$ juuret. (I on yksikkömatriisi, Matlab:ssa `eye`.)

   Määritä matriisin

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

   (a) Ominaisarvot Maplella ja Matlab:lla karakteristisen yhtälön juurina.
   (b) Ominaisarvot ja -vektorit Maplella komennolla `Eigenvectors` Näetkö, että tulokset ovat samat? (Huomaa, että Matlab skaalaa ominaisvektorit yksikkövektoreiksi.) (c)

Matlabilla `eig`-komennolla. Koska ominaisrvot ovat erilliset, on A "diagonalisoituva", ts. A voidaan esittää muodossa $A = V\,D\,V^{-1}$, missä V on ominaisvektoreiden (sarakkeet) muodostama matriisi ja D ominaisarvojen muodostama diagoaalimatriisi. Muodosta tämä esitys (mikä on eig-funktion tulomuodon takia erityisen kätevää).

Vihje: Ominaisarvot:
Maple: `with(LinearAlgebra); Eigenvectors`
Matlab: `charpoly, eig`
`charpoly(A)` antaa karakteristisen polynomin kerroinvektorin suoraan. Tässä ei tarvita `syms`-käsittelyä, jätetään Maplelle.

- http://math.aalto.fi/opetus/Mattie/MattieT/html/mlLinalg.html#mlLA020
- http://math.aalto.fi/opetus/k3/05/L/ominaisarvot.pdf
- Ominaisarvojen/vektorien geometrisen idean havainnollistus Maple:lla
  http://math.aalto.fi/∼apiola/08opemate/ominaisarvot.html
  http://math.aalto.fi/∼apiola/08opemate/ominaisarvot.mw (Maple-mw)

2. Opiskele Differentiaaliyhtälöiden perusasiota ja Maplekäsittelyä lähteistä:
   http://math.aalto.fi/opetus/MatOhjelmistot/2014kevat/L/ode.pdf (HAM-oppaan ode (ilman kuvia)
   https://sites.google.com/site/laskenta/maple Timo Mäkelän Maple-oppaan ODE-osa

   Laadi Maple-työarkki edellisen pohjalta, jossa käyt läpi siinä olevat esimerkit ja piirrät tekstistä puuttuvat kuvat, mielellään omin kommentein varustaen.

   Ohjeita, virheitä:

   - Jos ratkaisu on muuttujassa `ylauseke`, kokeile:
     `parvi := seq(seq(ylauseke, _C2 = -1 .. 1), _C1 = 0 .. 1)`
     Sitten esim: `plot([parvi], x = -3 .. 3, y = -10 .. 10)`
     Tiheämmän parven saat lisäämällä askeleen h tyyliin:
     `h:=0.5: parvi := seq(seq(ylauseke, _C2 = -1 .. 1,h), _C1 = -1 .. 1,h)`
     (Vrt. Matlab:n `-1:h:1`).
   - `infolevel`-kohdassa yhtälöt ovat menneet sekaisin (oikoluetussa kappaleessa olen merkinnyt korjaukset oppaan seuraavaa versiota ajatellen (ilmestynee ainakin netissä))
     (a) $y' + y + t = 0$
     (b) $y' + y^2 + t = 0$
     (c) $y' + sin(y) = 0$
     (d) $y' + sin(y) = t$
   - Numeerisesti ratkaistaessa on suositeltavaa käyttää alla olevaa output-optiota. Tällöin ratkaisun jatkokäsittely on suoraviivaista ilman aiempaa pikku temppuilua.

```
nratk:=dsolve({yht,x(1) = 2},x(t),type = numeric,output=listprocedure)
Y:=rhs(nratk[2])
```

3. mlODEsuuntakxxx

   Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on yleistä muotoa: $y' = f(t, y)$, ratkaisu on funktio $t \to y(t)$, jolle $y'(t) = f(t, y(t))$ jollain kokonaisella välillä $a \leq t \leq b$.

   Diffyhtälö määrää kussakin ty-tason pisteessä ratkaisukäyrän tangentin suunnan $y' = f(t, y)$. Jos tasoalueen pistehilan pisteisiin asetetaan vastaava suuntanuoli, saadaan suuntakenttä. Matlab tarjoaa hyvät välineet myös tähän: Kokeilepa seuraavaa:

```
close all
n=16;
tpisteet=linspace(0,3,n); ypisteet=linspace(-1,1,n);
[t,y]=meshgrid(tpisteet,ypisteet); % Pistehila, muistele 3d-grafiikkaa.
%%
% Katso, minkälainen pistehila:
plot(t(:),y(:),'.')
%%
pt=ones(size(y));
py=-y-5*exp(-t).*sin(5*t);
quiver(t,y,pt,py,1.5);  % pt=1, py=y'(t_{i,j})
title('y''=-y-5e^{-t}sin(5t)','FontSize',14)
xlabel('t');ylabel('y','Rotation',0)
xlim([0 3.2]);ylim([-1.3 1.15]); % Viritellään akselirajoja.
```

   Komento `quiver(x,y,u,v,skaalaus)` piirtää (`meshgrid`) hilapisteisiin [x,y] nuolet, joiden suuntavektorit ovat [u,v]. Nuolien pituus = `skaalaus*[u(k),v(k)]`-vektorin pituus.

   Tehtävä:
   Kirjoita edellä olevat komennot skriptiksi tiedostoon suuntak1.m ja lisää siihen diffyhtälön ratkaisu. Valitse joukko alkuarvoja ja piirrä samaan kuvaan suuntakenttä ja ao. alkuarvoja vastaavat ratkaisukäyrät. Voit täydentää skriptin vuorovaikutteiseksi käyttämällä alkuarvoille hiirisyöttöä funktiota ginput hyödyntäen.

   Matlab-ODE-oppia:
   http://math.aalto.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/tehtavia4.html#ODE

4. mplODEcoomb60t10

   Annettu diffyhtälö:
   $$y' = f(y) = 3 \sin y + y - 2.$$

   Piirrä suuntakenttä riittävän suuressa alueessa, jotta näet kaikki mahdolliset rajakäyttäytymiset, kun $t \to \infty$. Suorita suuntakenttäpiirros sekä Maplen `DEtools` kirjaston `DEplot`-funktiolla että Matlab:n `dfield8`-funktiolla. Miten autonomisuus näkyy suuntakenttäpiirroksessa?

Määritä tasapainopisteet funktion `fzero` avulla. Valitse alkupisteet suuntakenttäkuvan perusteella. Toki on syytä piirtää $f(y)$.
Määritä myös tasapainopisteiden stabiilisuus/epästabiilisuus.

Vahvista johtopäätöksiäsi piirtämällä muutamia ratkaisukäyriä sopiviin kohtiin molemmilla ohjelmilla. Matlabin dfield8 on toki hienompi ja tarkempi. Liitä dfield8-kuva mukaan luovutettaviin tiedostoihin. (Valitettavasti dfield-osuutta ei saa ajetuksi publish:n kautta.)

Ohje:
Maple:

```
        with(DEtools): with(plots):
        DEplot(dyhtalo,y(t),t=a..b,y=c..d); # Suuntakenttä
        DEplot(dyhtalo,y(t),t=a..b,y=c..d,[[y(t0)=y0],[y(t0)=y1],[y(t0)=y2]]);
        # Suuntakenttä ja ratkaisukäyriä.
Muista DEplot-valitsimet dirgrid, stepsize, method  (HAM s. 172)
```

Matlab: http://math.aalto.fi/opetus/MatOhjelmistot/2014kevat/L/dfield8.m (Rice University)

5. mlODEcoomb60t10b

Annettu diffyhtälö

$$y' = f(t, y) = y^2 - t\,y.$$

(a) Suorita suuntakenttäpiirros Maplen `DEtools` kirjaston `DEplot`-funktiolla. Miten epäautonomisuus näkyy suuntakenttäpiirroksessa?
Piirrä suuntakenttä riittävän suuressa alueessa, jotta näet kaikki mahdolliset rajakäyttäytymiset, kun $t \to \infty$.
Tunnista yksikäsitteinen vakioratkaisu, ja päättele se suoraan diffyhtälöstä.

(b) Ratkaise yhtälö `dsolve`:lla sopivilla alkuarvoilla, ja piirrä saamiasi ratkaisukäyriä suuntakenttäkuvaan. (Maple löytää analyytisen ratkaisun (yllättävästi), kun `erf`-funktio on käytettävissä.)

(c) Ratkaise yhtälö Matlabin `ode45`:llä. Modifioi tehtävän 3 Matlab-skriptiä tähän tehtävään sopivaksi. Piirrä ratkaisukäyriä suuntakenttäpiirrokseen.

(d) Käytä dfield8-funktiota suuntakenttään, piirrä hiiriklikkauksella ratkaisukäyriä, ja samaan kuvaan myös ode45:llä laskemiasi.

Ohje:
Maple:

```
        with(DEtools): with(plots):
        DEplot(dyhtalo,y(t),t=a..b,y=c..d); # Suuntakenttä
        DEplot(dyhtalo,y(t),t=a..b,y=c..d,[[y(t0)=y0],[y(t0)=y1],[y(t0)=y2]]);
        # Suuntakenttä ja ratkaisukäyriä.
Muista DEplot-valitsimet dirgrid, stepsize, method  (HAM s. 172)
```

Matlab: http://math.aalto.fi/opetus/MatOhjelmistot/2014kevat/L/dfield8.m (Rice University)

6. mplODEsuolat
   Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhetkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä.

```
3 l/min

----------          ----------
-->       |         |         |
--        |_________|         |
 |         4 l/min ->         |
 |        -----------         |
 |        |         |         |
 |    A   |         |    B    |
 |        |---------|         |
 |         <-- 1 l/min        |
 |        |---------|         ----
 |________|         | ____________-> 3 l/min
```

Määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona. Piirrä suolamäärät ajan funktiona sekä toiseen kuvaan "trajektori faasitasossa", eli käyrä $(x_1(t), x_2(t))$, missä siis aikaa t pidetään käyräparametrina.

Millä ajanhetkellä suolamäärät säiliöissä ovat samat?

Ratkaise tehtävä
(a) ominaisarvojen/vektorien avulla Maplella
(b) (tarkistukseksi) `dsolve`:lla.
(c) ominaisarvojen/vektorien avulla Matlab:lla

Vihje: http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L10kalvot.pdf Luentokalvoja, ss. 1–4 , s. 13, 15 alk. 2×2-lineaaristen systeemien faasitasot.

7. mplODEresonanssi
   Opiskele Timo Mäkelän oppaan kohtaa “resonanssi”, ja tee siihen liittyvä tehtävä: Kyseessä on vaimentamaton värähtely, jonka diffyhtälö on:

$$x'' + \omega_0^2 x = \sin \omega\, t$$

   a. Ratkaise yhtälö `dsolve`:lla.
   b. Olkoon $\omega_0 = 2$. Muuta pakkovoiman kulmataajuuden ω arvoa 0.1:n välein arvoon 2 saakka ja siitä ylikin. Miten ratkaisun käytös muuttuu, erityisesti värähtelyn amplitudi, piirtele joitakin kuvia.
   c. Miten ratkaisu arvolla $\omega = 2$ eroaa muilla arvoilla saatavista ratkaisuista?

d. Pari sanaa resonanssista.

Vihje: Maple käsittää erinimiset symbolit eri lukuina. Yleisessä tilanteessa se ei ota huomioon mahdollisuutta $\omega_0 = \omega$. Kannattaa sijoittaa yhtälö alkajaisiksi muttujaan tyyliin: `dyhtalo:=x''(t) + ...`, jossa on yleiset (vapaat) muuttujasymbolit. Kun annat jälkeenpäin arvoja ω:lle ja/tai ω_0:lle, ne sijoittuvat automaattisesti yhtälöön. Kysy aina ensin kuitenkin, mikä on yhtälösi, siis kirjoittamalla vain sen nimi: `dyhtalo;`

8. mlODE106
Kirjoita heiluriyhtälö $\Theta'' + \frac{g}{L}\sin(\Theta) = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi ja samantien Matlab-funktioksi m-tiedostoon. Voit ottaa $g/L = 1$.

   Laske ratkaisu sopivalla aikavälillä (esim. $[0, 10]$) ja kolmella erilaisella alkuarvolla, joilla saat erityyppiset ratkaisut. Käytä `ode45`-funktiota.

   Piirrä ratkaisukäyrät aikatasoon ja trajektorit faasitasoon.

   Piirrä faasitason suuntakenttä Matlab-funktiolla `pplane8`.
Ohje: Korkeamman kertaluvun yhtälö voidaan muuntaa 1. kertaluvun systeemiksi ottamalla tässä tapauksessa: $y_1 = \Theta, y_2 = \Theta'$, jolloin $y_1' = y_2, y_2' = \ldots$.

9. mplODE016.tex
Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \frac{2\sqrt{y - \ln t}}{t} + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 0$$

   välillä $t \in [1, 1.8]$ Ratkaise tehtävä Eulerin menetelmällä

   (a) askelpituudella $h = 0.2$
   (b) askelpituudella $h = 0.1$
   (c) askelpituudella $h = 0.05$.

   Määritä tarkka ratkaisu Maple:n `dsolve`-komennolla ja laske sen avulla virheet, piirrä ja taulukoi kussakin tapauksessa. Eulerin menetelmän virhekäytös on luokkaa $O(h)$, ts. virhe kutakuinkin puolittuu, kun askel puolittuu. Tukeeko laskusi tätä.

   Annetaan Eulerin menetelmän Maple-koodi Maple: [HAM s. 206] (copy/paste $\rightarrow$ Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
```

```
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

10. Hae Lyhyestä oppaasta: http://math.aalto.fi/∼apiola/matlab/opas/lyhyt/ODE.html

    Eulerin menetelmän Matlab-koodi. Suorita tähän tyyliin edellinen Maple-tehtävä http://math.aalto.fi/∼apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/html/euleresim1.html