Aalto-yliopisto

Matemaattiset ohjelmistot MS-E1999

3. luennon tehtävät

Tehtävät ovat pääasiassa Maplea, mutta Matlabiakin on mukana.

Palauta kustakin harjoitustehtävistä Maplen "Export->pdf" valinnalla (tai MATLABin `publish`-toiminnolla) julkaistu pdf-dokumentti kurssin Moodle-sivulle viimeistään ... Keskstellaan, onko tarvetta pidentää palautusaikoja.

Huom! Pidennetty palautusaika on mahdollinen väli(koe)viikon takia.

Kurssin Moodlen rekisteröitymisavain on **matapp122**

Kurssin tehtävistä suurin osa on poimittu laitoksen tietokenmatematiikan sivustolta
http://math.aalto.fi/opetus/Mattie/MattieT/html.
Kääntäen, tämänkin kurssin yhteydessä kehitettävät uudet tehtävät ratkaisuineen, vihjeineen ym. siirtyvät samantien *Mattie*-kokoelmaan.

Tiivis Maple-komentokooste:
http://math.aalto.fi/opetus/MatOhjelmistot/2012kevat/maple/pikamaple.pdf.

Tehtävät

1. mplDi003
   Aiheina ovat mm. derivointi, maksimointi, yhtälöiden ratkaiseminen,iterointi. Avaa alla viitattu työarkki ja käy läpi siinä olevat esimerkit ja tehtävät omaksi iloksi ja opiksi, luovutettavat osat alla:

   math.aalto.fi/opetus/Mattie/MattieT/mplteht/mplDiffint1/apusrc/mplDi003Pohja.mw
   (Maple-ws, lataa hiiren oikealla)
   math.aalto.fi/opetus/Mattie/MattieT/mplteht/mplDiffint1/apusrc/mplDi003Pohja.pdf
   (pdf-muoto katsottavaksi)
   Siis tässä ne tehtävät:

   (a.) Määritä funktion $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ nollakohdat ja lokaali max/min. Piirrä funktion ja derivaatan kuvaajat. Käsittele polynomia (a) lausekkeena (b) funktiona

(b.) Putoavan kappaleen nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mv'(t) = mg - kv(t)^2$, jos positiivinen suunta on **alaspäin** ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön kertoimella $k > 0$.
a) Osoita, että funktio

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\; t\right)$$

toteuttaa vaaditun differentiaaliyhtälön.
b) Mikä on rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$?
Vihje: `simplify`-käsky ei tee sievennyksiä aivan loppuun, koska se ei tiedä, ovatko m, g, k positiivisia. Lisää käsky `assume(m>0 and k>0 and g>0)` ja kokeile sievennystä sen jälkeen.

(c.) Kuulantyönnön tulos riippuu kuulan alkunopeudesta v, lähtökorkeudesta h ja työnnön suuntakulmasta x seuraavan lausekkeen mukaisesti:

$$f(x) = \frac{v\cos x\left(v\sin x + \sqrt{v^2\sin^2 x + 2hg}\right)}{g},$$

missä $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $h = 2$, $v = 14$ ja $g = 9.81$. Määritä työnnön optimaalinen suuntakulma ja maksimitulos.
Kannattanee edetä seuraavien vaiheiden mukaan:

- Määrittele f funktiona; älä sijoita lukuarvoja tässä vaiheessa, niin voit tarkistaa, että lauseke on oikein.
- Sijoita lukuarvot h, v, g.
- Piirrä funktion f kuvaaja välillä $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ ja tarkista, että se näyttää järkevältä. (Yleinen virhe: kertomerkkejä puuttuu!)
- Ratkaise maksimi normaaliin tapaan muodostamalla yhtälö $f'(x) = 0$, jonka ratkaiset numeerisesti `fsolve`-käskyllä.
  Kokeile myös “mustaa laatikkoa” `maximize` ja vertaa.
- Muuta saatu kulma asteiksi ja mieti, onko tulos järkevä.

2. mplDi015
Määritä ellipsin $9x^2 + 16y^2 = 144$ sisään piirretyn (akselien suuntaisen) suorakulmion maksimaalinen pinta-ala. Piirrä ellipsi ja suorakulmio.

Vihje Ellipsin piirtämisessä on paras tapa käyttää parametriesitystä

$$x = a\cos t, y = b\sin t$$

Voit kokeilla myös `implicitplot`-funktiota (tarvitaan `with(plots)` - latauskomento.)
Suorakulmion voit esittää nurkkapisteiden listana tyyliin

```
nurkat:=[[x1,y1],[x2,y2],[x3,y3],[x4,y4],[x1,y1]];
```

Nykyisin myös Matlab-tyylinen: `xlista,ylista` käy plot:n argumentiksi.

3. mplDi014 (ent. mplDi011)
   Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

   Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

4. mplDi019.tex
   Tarkastellaan funktiota (normeerausta vaille normaalijakauman kertymäfunktiota)

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

   Laske sopivaa 0:ssa kehitettyä Taylorin polynomia (jota usein kutsutaan MacLaurinin polynomiksi) ja jäännöstermiä käyttäen likiarvo luvulle $\mathrm{erf}(1)$ siten, että $|virhe| \leq 0.005$.

   Maple tuntee funktion erf. Laske Maplella todellinen virhe tällä termien määrällä ja vertaa jäännöstermiarviolla saamaasi ylärajaan.

   Piirrä erf-funktion ja ao. Taylorin polynomin kuvaajat ja myös niiden erotus (jotta erottuvat) välillä $[0, 1]$

   Vihje: Käytä joko `taylor` tai `series`-komentoa. Huomaa, että kumpikin palauttaa potenssisarjatietorakenteen, jossa on $O(h)$-termi. Itse polynomi saadaan komennolla
   `convert(sarja,polynom)`

   Huomaa, että yo. komentojen n tarkoittaa jäännöstermin astelukua (jota useimmiten merkitään Taylor-kaavoissa $(n + 1)$:llä).
   Huomaa lisäksi, että parilliset potenssit puuttuvat (miksi?). Siten esim. 7- ja 8-asteisten polynomien virheen aseteluku = 9 (eli $T_7 = T_8$). Tässä virhetermissä esiintyvän 9. derivaatan itseisarvon maksimi nähdään vaikka piirtämällä ja laskemalla ko. derivaatta kuvasta näkyvässä pisteessä.

5. mplDiV0019.tex
   Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$

   .

   Olkoon $f(x, y) = |xy|$.
   (a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x, y) = k, k = 1, 2, 3$.
   (b) Piirrä f:n gradienttikenttävektoreita `fieldplot`:n avulla samaan kuvaan korkeuskäyräpiirrosten kanssa. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

   Vihje:
   Gradientti voidaan ladata useastakin kirjastosta. Selvintä on määritellä itse:

```
gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]
```
(Voit myös ladata: `with(linalg);` ja saat käyttöön funktion `grad`)

`with(plots)` lataa `contourplot`- ja `fieldplot`-funktiot.
Grafiikkojen yhdistäminen:

```
kuva1:=contourplot(...)
kuva2:=fieldplot(...)
display(kuva1,kuva2);
```

Aloita työarkki näin:

```
> restart:
> with(plots): with(plottools):
> nuoli:=(alkup, loppup,vari)->arrow(alkup,loppup,0.01,0.05,0.02,color=vari);
> korkeuskayra:=k->implicitplot(abs(x*y)=k,x=-2..2,y=-2..2);
> #  Maariteltiin grafiikka-arvoinen funktio, usein tosi katevaa!
> kkparvi:=display(seq(korkeuskayra(k),k=1..3);
>
```

Kts. lisää: mplDi0002Apu.mw

6. mplV00192.tex
Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon

$$h(x,y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300.$$

Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen.

   a. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1, 2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?
   Tämä on käsinlaskutehtävä, mutta tee Maplella. Havainnollista Maplepiirroksin: Pintapiirros: `plot3d`, korkeuskäyrät: `contourplot` tai `implicitplot`. Leikkauskäyrä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa.
   b. Muodosta funktion $h(x, y)$ gradienttifunktio (gradienttikenttä). Piirrä gradienttikenttä `plots`-pakkauksen funktiolla `fieldplot`. Yhdistä korkeuskäyräpiirros tämän kanssa `display`-funktion avulla.

vihje Gradienttikentän voi laskea (tietysti käsin) tai derivoimalla Maplen `diff`:llä tai `linalg`-pakkauksen funktiolla `grad`. Ei ole pahitteeksi, jos kokeilet kaikkia tapoja.

7. mplDiV014.tex
Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x, y)|x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.)

Vihje:
Joskus `solve` palauttaa `RootOf`-muotoisia lausekkeita. Kannattaa yrittää niiden sieventämistä `allvalues`-komennolla. (Tässä tehtävässä toimii, tosin ihminen osaa tässä tapauksessa nopeamminkin "solvata" ilman apuneuvoja.)

8. mlCF13.tex/mplCF13.tex
Tehdään tällä kertaa Maplella.

Yhdysvaltojen perustuslaki vaatii, että maassa suoritetaan joka kymmenes vuosi väestönlaskenta. Ohessa on väestönlaskennan tuloksia sadoissa miljoonissa asukkaissa viime vuosisadalta.

1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
76	92	106	122	132	150	179	203	226	248

Tee polynomi-interpolointi datalle, ja ennusta väestön määrä vuonna 2010. Kuinka ennusteesi suhtautuu laskennan todelliseen tulokseen: 308,745,538 laskettua asukasta?

Lataa Mapleen työarkki: math.aalto.fi/opetus/MatOhjelmistot/2014kevat/L/LagInterp.mw

Siinä määritellään Lagrangen interpolaatiomenetelmän toteutavat funktiot L ja lagint.

(a) Tee itsellesi selväksi niiden toiminta ja suorita tehtävä lagint-funktion avulla käyttäen oletustarkkuutta (Digits:=10). Piirrä datapisteet ja interpolaatiopolynomi (kuten aina).

(b) Kaytä Maplen valmista funktiota: `PolynomialInterpolation` (ensin `with(CurveFitting`:) Oletustarkkuus saattaa yllättää, lisää tarkkuutta ensin Matlabin tarkkuuteen :16 numeroa, ja ehkä joudut lisäämään vielä siitäkin. Kokeile vielä valintaa `form=Lagrange`, jolloin voit taas palata alkuperäiseen tarkkuuteen.

(c) Sovita PNS-polynomeja, kuten Matlab-tehtävässäkin.

Huom: Tehtävän skaalaus on erityisesti ongelmallista, jos valitsisit uuden muuttujan tyyliin $s = \frac{t-1945}{45}$ (tms.), niin muutkin polynomimuodot toimisivat paremmin, mutta antaapa nyt olla. (Voit lukea Molerin Censusgui, yms.)

US- väkiluku Tee USAn Censustehtävä Maplella. Myös Lagrange. Säätele tarkkuuksia, muuttujanvaihto? Ja vihdoin se Vandermonde!

9. mplODE013.tex
Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

Vihje
Diffyhtälön saat ratkaistuksi komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

10. mplODExyz
Ratkaise ("lievästi kankea") differentiaalityhtälö

$$y' = -1000(y - \sin t) + \cos t, y(0) = 1$$

välillä $1 \leq t \leq 1$.

(a) Käytä `dsolvea`, piirrä suuntakenttä Maplen `DEplot`:lla ja dsolvella saamasi ratkaisukäyrä samaan kuvaan. (Maplen DEsolve laskee hiukan "karkella kädellä".)

(b) Ratkaise myös numeerisesti Matlab:n `ODE45`:llä ja piirrä. Kokeile suuntakenttään Rice-Universityn hienoa dfield8-funktiota, miellään myös (Ohjeita myös Matlabin perusfunktioilla toteutettaviin suuntakenttäkonstruktioihin annetaan myöhemmin, löytyy linkeistämme, avainasemassa ovat Matlab-funktiot `meshgrid` ja `quiver`)

Lauseita ja kaavoja

Taylorin lause Olkoon $f \in C^{(n+1}[a, b]$ ja $x_0 \in [a, b]$. Jokaista $x \in [a, b]$ kohti on olemassa $\xi = \xi(x) \in (x_0, x)$ (tai (x, x_0) siten että

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

missä

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ja $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$