

Lectio Praecursoria:

Epälokaali epälineaarinen potentiaalteoria ja fraktionaaliset integraalioperaattorit

Janne Korvenpää

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

18.11.2016

Lokaali ja lineaarinen: Laplacen yhtälö

Lokaali ja lineaarinen: Laplacen yhtälö

- ▶ Yksi tyypillisimpiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä.
- ▶ Tavoitteena etsiä n :n muuttujan funktio u siten, että

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{joukossa } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Δ on nimeltään Laplacen operaattori.

Lokaali ja lineaarinen: Laplacen yhtälö

- ▶ Yksi tyypillisimpiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä.
- ▶ Tavoitteena etsiä n :n muuttujan funktio u siten, että

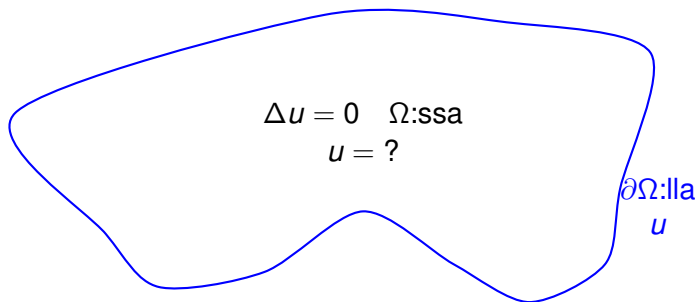
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{joukossa } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Δ on nimeltään Laplacen operaattori.

- ▶ Fysiikassa Ω on usein 2- tai 3-ulotteinen kappale.
- ▶ Mallintaa useita fysiikan ilmiöitä kappaleessa Ω :
 - ▶ lämpötilan jakautumista tasapainotilassa,
 - ▶ sähköpotentiaalia tasapainotilassa,
 - ▶ aaltoliikkeen tasapainotilaa.

Laplacen yhtälön reuna-arvo-ongelma

- ▶ Yksi tyypillisimmistä tilanteista on, että funktion u arvo tunnetaan joukon Ω reunalla $\partial\Omega$.
 - ▶ Esim. kappaleen sähköpotentiaali on mitattu sen reunalla ja halutaan selvittää sähköpotentiaalijakauma kappaleen sisällä.
- ▶ Funktio u ratkaistavissa yksikäsitteisesti, kunhan reunakäyttäytyminen ei tavattoman monimutkaista.



1-ulotteinen Laplacen yhtälö

- ▶ Differentiaaliyhtälö $u''(x) = 0$.

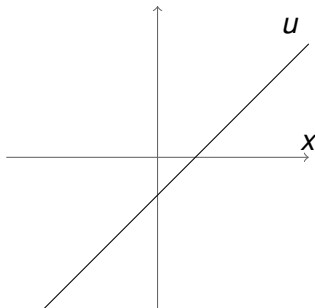
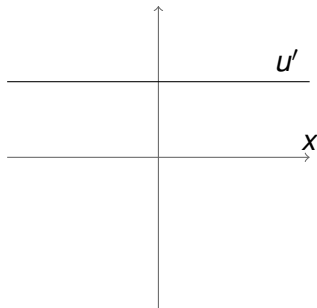
1-ulotteinen Laplacen yhtälö

- ▶ Differentiaaliyhtälö $u''(x) = 0$.



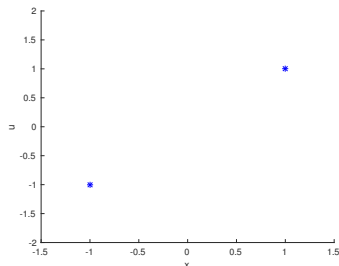
$$\Rightarrow u'(x) = a \quad \Rightarrow \quad u(x) = ax + b$$

joillakin vakioilla a ja b .

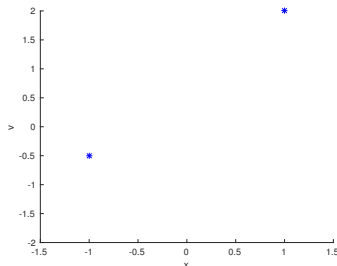


1-ulotteinen reuna-arvo-ongelma

- ▶ $\Omega = (-1, 1)$, $\partial\Omega = \{-1, 1\}$.
- ▶ $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$; $v(-1) = -0.5$, $v(1) = 2$.
- ▶ $\Delta u = 0$ joukossa Ω ; $\Delta v = 0$ joukossa Ω .



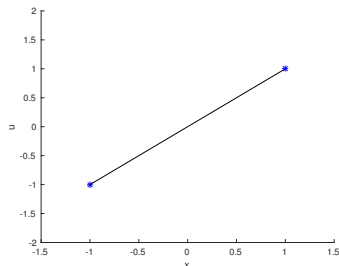
u :n reuna-arvot



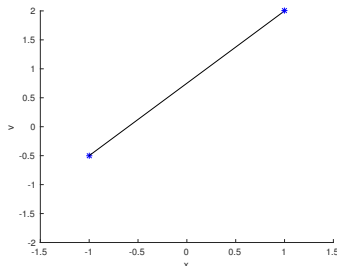
v :n reuna-arvot

1-ulotteinen reuna-arvo-ongelma

- ▶ $\Omega = (-1, 1)$, $\partial\Omega = \{-1, 1\}$.
- ▶ $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$; $v(-1) = -0.5$, $v(1) = 2$.
- ▶ $\Delta u = 0$ joukossa Ω ; $\Delta v = 0$ joukossa Ω .



u :n kuvaaja



v :n kuvaaja

Epälokaali: fraktionaalinen Laplacen yhtälö

- ▶ Fraktionaalinen $\rightarrow$ derivointien kertaluku ei kokonaisluku.

Epälokaali: fraktionaalinen Laplacen yhtälö

- ▶ Fraktionaalinen $\rightarrow$ derivointien kertaluku ei kokonaisluku.
- ▶ Voidaan määritellä Fourierin muunnoksen $\mathcal{F}$ avulla, joka muuntaa derivoinnin kertolaskuksi taajuuspuolelle;
 - ▶ $\mathcal{F}(-\Delta u) = |\xi|^2 \mathcal{F} u$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ on taajuuspuolen muuttuja.
- ▶ Fraktionaalinen Laplacen yhtälö kertaluvulla $s \in (0, 1)$:

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F} u) = 0.$$

Epälokaali: fraktionaalinen Laplacen yhtälö

- ▶ Fraktionaalinen $\rightarrow$ derivointien kertaluku ei kokonaisluku.
- ▶ Voidaan määritellä Fourierin muunnoksen $\mathcal{F}$ avulla, joka muuntaa derivoinnin kertolaskuksi taajuuspuolelle;
 - ▶ $\mathcal{F}(-\Delta u) = |\xi|^2 \mathcal{F} u$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ on taajuuspuolen muuttuja.
- ▶ Fraktionaalinen Laplacen yhtälö kertaluvulla $s \in (0, 1)$:

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F} u) = 0.$$

- ▶ Esiintyy useiden pitkäkantamaisten ilmiöiden mallinnuksessa mm. fysiikassa, materiaalitieteissä ja finanssimatematiikassa:
 - ▶ Qvasigeostrofiset virtausmallit,
 - ▶ Huokoisen aineen diffuusiomallit,
 - ▶ Amerikkalaisten optioiden hinnoittelumallit.

Epälokaali: fraktionaalinen Laplacen yhtälö

- ▶ Fraktionaalinen Laplacen yhtälö voidaan esittää myös integraalidifferentiaaliyhtälönä

$$(-\Delta)^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = 0.$$

Epälokaali: fraktionaalinen Laplacen yhtälö

- ▶ Fraktionaalinen Laplacen yhtälö voidaan esittää myös integraalidifferentiaaliyhtälönä

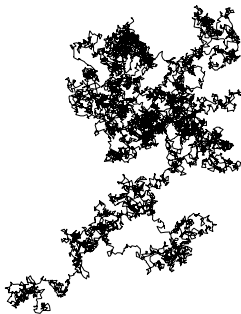
$$(-\Delta)^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = 0.$$

- ▶ Epälokaalisuus $\rightarrow$ integraalin vuoksi $(-\Delta)^s u(x)$ riippuu funktion u arvoista myös kaukana pisteestä x , ei ainoastaan x :n lähiympäristössä kuten derivaatoista koostuva $\Delta u(x)$.

Epälokaali satunnaiskävely

Epälokaali satunnaiskävely

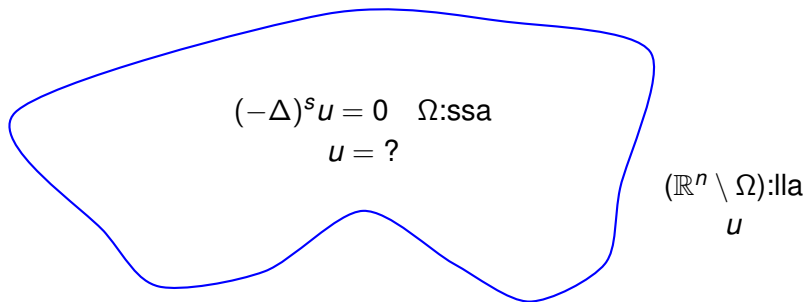
- ▶ Jos $u(x)$ kuvaa satunnaiskävelyn todennäköisyysjakaumaa olla pisteessä x , niin
 - ▶ Lokaalille satunnaiskävelylle (Brownin liike) $\Delta u = 0$,
 - ▶ Eräälle epälokaalille satunnaiskävelylle $(-\Delta)^s u = 0$.



Epälokaali reuna-arvo-ongelma

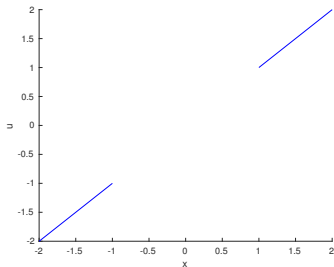
Epälokaali reuna-arvo-ongelma

- ▶ Fraktionaalille Laplacen yhtälölle "reuna-arvot" on tunnettava koko joukon Ω ulkopuolisessa osassa $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, jotta ratkaisun voi määrittää yksikäsitteisesti.

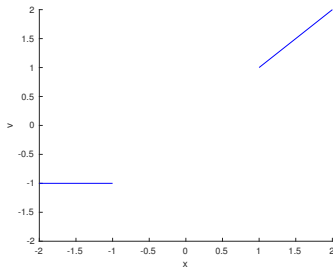


1-ulotteinen epälokaali reuna-arvo-ongelma

- ▶ $\Omega = (-1, 1)$, $\mathbb{R} \setminus \Omega = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
- ▶ $u(x) = x$ ($\mathbb{R} \setminus \Omega$):lla; $v(x) = \max\{x, -1\}$ ($\mathbb{R} \setminus \Omega$):lla.
- ▶ $(-\Delta)^{2/3}u = 0$ joukossa Ω ; $(-\Delta)^{2/3}v = 0$ joukossa Ω .



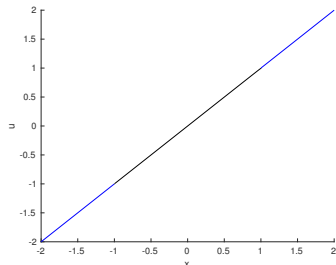
u :n reuna-arvot



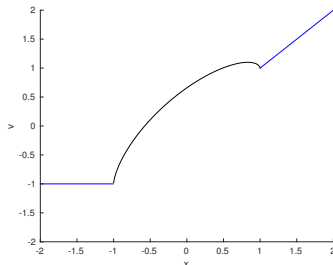
v :n reuna-arvot

1-ulotteinen epälokaali reuna-arvo-ongelma

- ▶ $\Omega = (-1, 1)$, $\mathbb{R} \setminus \Omega = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
- ▶ $u(x) = x$ ($\mathbb{R} \setminus \Omega$):lla; $v(x) = \max\{x, -1\}$ ($\mathbb{R} \setminus \Omega$):lla.
- ▶ $(-\Delta)^{2/3}u = 0$ joukossa Ω ; $(-\Delta)^{2/3}v = 0$ joukossa Ω .



u :n kuvaaja

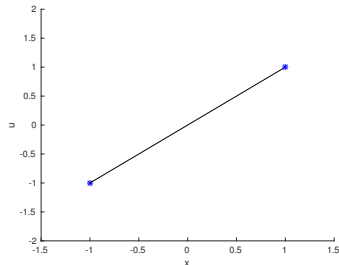


v :n kuvaaja

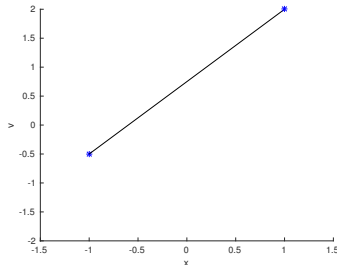
Vertailuperiaate

Vertailuperiaate

- ▶ Jos u ja v Laplacen yhtälön ratkaisuja joukossa Ω ja $u \leq v$ reunalla $\partial\Omega$, niin $u \leq v$ myös joukossa Ω .
- ▶ Pätee paljon yleisemmillekin lokaaleille yhtälöille.



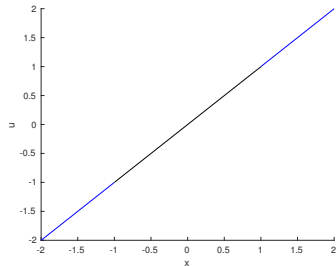
u :n kuvaaja



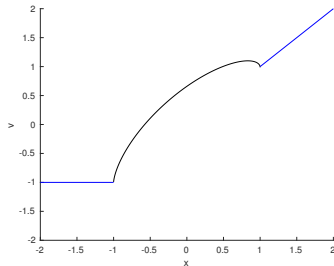
v :n kuvaaja

Epälokaali vertailuperiaate

- ▶ Jos u ja v fraktionaalisen Laplacen yhtälön ratkaisuja joukossa Ω ja $u \leq v$ joukon Ω ulkopuolella, niin $u \leq v$ myös joukossa Ω .
- ▶ Pätee paljon yleisemmillekin epälokaaleille yhtälöille.



u :n kuvaaja



v :n kuvaaja

Yleisempi epälokaali yhtälö

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = 0 \quad \hookrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(y)) K(x, y) dy = 0,$$

mikä vastaa epälokaalin satunnaiskävelyn siirtymätodennäköisyysjakauman muuttamista.

Yleisempi epälokaali yhtälö

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = 0 \quad \hookrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(y)) K(x, y) dy = 0,$$

mikä vastaa epälokaalin satunnaiskävelyn siirtymätodennäköisyysjakauman muuttamista.

$$\hookrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) K(x, y) dy = 0, \quad 1 < p < \infty,$$

mikä muuttaa yhtälön epälineaariseksi; Fraktionaalinen Laplacen yhtälö on lineaarinen:

$(-\Delta)^s(u + v) = (-\Delta)^s u + (-\Delta)^s v$, mutta yllä olevalle vastaava ei päde, kun $p \neq 2$.

Epälokaali epälineaarinen potentiaalteoria

- ▶ Väitöskirjassa kehitetään potentiaalteoriaa yhtälöille

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) K(x, y) dy = 0.$$

Epälokaali epälineaarinen potentiaalteoria

- ▶ Väitöskirjassa kehitetään potentiaalteoriaa yhtälöille

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) K(x, y) dy = 0.$$

- ▶ Yksi keskeisistä kysymyksistä: miten u :n "reuna-arvot" Ω :n ulkopuolella sekä joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ muoto vaikuttavat järkevän ratkaisun olemassaoloon.

Epälokaali epälineaarinen potentiaalteoria

- ▶ Väitöskirjassa kehitetään potentiaalteoriaa yhtälöille

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) K(x, y) dy = 0.$$

- ▶ Yksi keskeisistä kysymyksistä: miten u :n "reuna-arvot" Ω :n ulkopuolella sekä joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ muoto vaikuttavat järkevän ratkaisun olemassaoloon.
- ▶ Haasteita aiheuttavat sekä yhtälön epälokaali käyttäytyminen että sen epälineaarisuus.

Epälokaali epälineaarinen potentiaalteoria

- ▶ Vertailuperiaatteet keskeisessä osassa; voimassa yhtälölle $\mathcal{L}u = 0$.

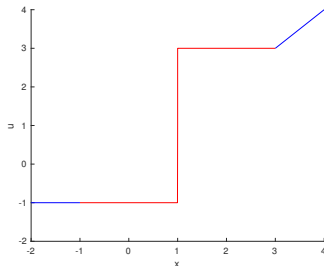
Epälokaali epälineaarinen potentiaalteoria

- ▶ Vertailuperiaatteet keskeisessä osassa; voimassa yhtälölle $\mathcal{L}u = 0$.
- ▶ Ratkaisujen sijaan tarkastellaan super- ja subratkaisuja: $\mathcal{L}u \geq 0$ ja $\mathcal{L}u \leq 0$.
- ▶ Erilaiset heikommat ratkaisun käsitteet:
 - ▶ Heikot (super/sub)ratkaisut,
 - ▶ (s, p) -(super/sub)harmoniset funktiot,
 - ▶ (s, p) -viskositeetti(super/sub)ratkaisut.

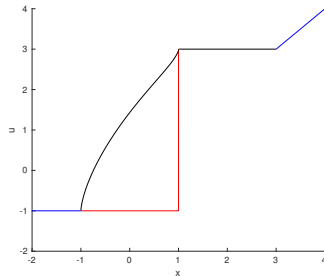
Julkaisu III

Julkaisu III

- ▶ Tutkitaan yhtälöön $\mathcal{L}u = 0$ liittyvää ns. esteongelmaa.
 - ▶ Esteongelma keskeinen työkalu potentiaalteoriassa.
- ▶ Johdetaan olemassaolo- ja säännöllisyystuloksia esteongelman ratkaisulle.



u :n reuna-arvot ja este



u :n kuvaaja

Julkaisu IV

- ▶ Tutkitaan heikkoja superratkaisuja ja johdetaan niille keskeisiä ominaisuuksia.
- ▶ Määritellään (s, p) -superharmonisten funktioiden käsite ja johdetaan niille keskeisiä tuloksia.
- ▶ Kehitetään epälokaali versio ns. Perronin menetelmästä.
 - ▶ Saadaan yhtälölle $\mathcal{L}u = 0$ teoreettinen ratkaisu, ns. Perronin ratkaisu, hyvin yleisillä oletuksilla reuna-arvoista.
 - ▶ Näytetään Perronin ratkaisun olevan tyypillisen ratkaisun käsitteen yleistys.

- ▶ Tutkitaan eri ratkaisun käsitteiden yhtenevyyttä yhtälölle $\mathcal{L}u = 0$.
- ▶ Määritellään (s, p) -viskositeettisuperratkaisujen käsite ja johdetaan keskeisiä ominaisuuksia.
- ▶ Näytetään, että (s, p) -superharmonisten funktioiden ja (s, p) -viskositeettisuperratkaisujen luokat ovat hyvin yleisillä oletuksilla samat.
 - ▶ Kun tarkastellaan vain rajoitettuja ratkaisuja, niin myös heikkojen superratkaisujen luokka yhtälölle $\mathcal{L}u = 0$ on sama kuin kaksi yllä olevaa.