Matematiikan verkko-opetus osana perusopetuksen kehittämistä Teknillisessä korkeakoulussa

Linda Blåfield

30. huhtikuuta 2009

Sisältö

1 Johdanto

Tässä työssä käsitellään matematiikan verkko-opetusta korkeakoulutasolla. Osana tutkimusta tarkastellaan Teknillisessä korkeakoulussa syksyllä 2008 järjestettyä verkko-opetukseen pohjautuvaa kurssia Mat-1.1610 Mathematics 1, joka järjestettiin kansainvälisenä yhteistyönä Baijerin virtuaaliyliopiston (VHB) ja Suomen Virtuaaliyliopiston (SVY) kanssa. Yhteistyön toivotaan laajenevan tulevaisuudessa myös muihin suomalaisiin ja ulkomaalaisiin yliopistoihin. Kansainvälinen yhteistyö on osa TKK:n matematiikan perusopetuksen kehittämistyötä. Yksi osa tässä kehittämistyössä on ollut myös tietokoneavusteisten tehtävien tekeminen ja käyttäminen. Kansainvälinen kurssi on hyvä testikenttä tällaiselle kehitystyölle, sillä kurssin koko on pieni, jolloin suunnitelmiin on helpompi tehdä muutoksia. Yhteistyöllä voidaan saavuttaa etuja muun muassa kustannusten jakamisen ja ajatusten ja kokemusten vaihdon suhteen.

Suomalaisissa yliopistoissa ja muissa oppilaitoksissa ollaan oltu huolestuneita opiskelijoiden matematiikan osaamisen tasosta eräiden kansainvälisten tutkimusten tuloksista huolimatta [32, 38, 40]. Suomalaisten aloittavien yliopisto-opiskelijoiden matematiikan osaamisen on arvioitu olevan heikkoa etenkin algebran ja geometrian osa-alueilla [40]. Teknillisessä korkeakoulussakin monen opiskelijan osaaminen on heikkoa heti ensimmäisen vuoden matematiikan peruskurssien kohdalla. Tähän ongelmaan on mietitty ratkaisuja, ja kehitystyön tuloksena matematiikan ja systeemianalyysin laitoksessa on aloitettu projekteja tilanteen korjaamiseksi. Yhtenä tuloksena järjestettiin tämän työn aiheena oleva verkko-opetukseen perustuva matematiikan kurssi. Tällä pyritään siihen, että opiskelijoiden elämäntilanne otetaan entistä paremmin huomioon, sillä pakollista läsnäoloa yliopistolla ja muuta tiukkoihin aikaraameihin sidottua toimintaa on vähennetty. Opetuskielenä on englanti, joten myös ulkomaalaiset opiskelijat voivat osallistua kurssille. Englanninkielinen opetus on ollut viime vuosina kustannussyistä monilla kursseilla pelkästään itseohjattua opiskelua.

Tässä työssä käsiteltävät tutkimusongelmat ovat seuraavat:
1. Mitä etuja kansainvälisellä yhteistyöllä voidaan saavuttaa verkko-opetuksessa?
2. Saavutetaanko verkko-opetuksella yhtä hyviä oppimistuloksia kuin perinteisellä opetuksella?

3. Miten automaatiota käyttävä verkko-opetus sopii yhteen erilaisten pedagogisten viitekehysten kanssa?
4. Mikä on uusien opiskelijoiden lähtötaso, ja miten sitä tulisi mitata?
5. Mitä kokeilusta opittiin?

Työssä esitellään lisäksi erilaisia verkko-opetukseen liittyviä pedagogisia näkökulmia ja arvioidaan niiden perusteella kurssin pedagogista toimivuutta. Myös käytetyt virtuaaliset toimintaympäristöt ja niiden erilaiset mahdollisuudet esitellään. Koska kyseessä on ensimmäistä kertaa järjestettävä opetuskokeilu, lopuksi mietitään myös, mitä kokeilusta opittiin ja mitä ensi kerralla kannattaa tehdä eri tavalla, ja tutkitaan, saavutettiinko kansainvälisellä yhteistyöllä merkittäviä tuloksia. Lopuksi esitellään vielä TKK:lla syksyllä 2008 järjestetty tietokoneavusteinen matematiikan perustaitotesti ja sen tuloksia. Kirjoittaja on tehnyt testin tehtävät STACK-ohjelmistolla [11, 50] Tampereen teknillisen yliopiston vastaavien tehtävien pohjalta [40].

Työn kirjoittaja on valmistellut virtuaalista matematiikan peruskurssia varten monenlaista materiaalia. Kirjoittaja kirjoitti kurssin teoriaosuuden htex-muotoon internetiin, jossa se oli kaikkien opiskelijoiden luettavissa. Lisäksi kirjoittaja teki kurssille tietokonepohjaisella STACK-ohjelmistolla noin 50 harjoitustehtävää. Tehtävät ja materiaali kirjoitettiin englanniksi, mutta englanninkieliset tehtävät käännettiin myös suomen kielelle laajempaa käyttöä ajatellen. Kirjoittaja toimi myös assistenttina kurssilla. Työnkuvaan kuului opiskelijoiden harjoitustehtävien tarkastus ja laskuharjoituksien pitäminen.

2 Verkko-opetuksen käsitteistö

Verkko-opetuksen käsitteistö vaihtelee asiayhteydestä riippuen. Seppo Tella on määritellyt verkko-opetuksen opetuksena, opiskeluna ja oppimisena, jota tuetaan tai jonka jokin osa perustuu tietoverkkojen, erityisesti Internetin kautta saataviin ja siellä oleviin aineistoihin. Siinä yhdistyvät kasvokkain opetus (ns. face to face-opetus) ja verkkopohjainen opetus symbioottiseksi monimuoto-opetukseksi [55]. Määritelmän yleistäminen on jokseenkin ongelmallista, sillä sen mukaan myös luentomateriaalien jakaminen www-sivuilla on verkko-opetusta, vaikka se ei vastaakaan käsitystämme verkko-oppimisesta.

Ropo määrittelee oppimisympäristön oppiaineksesta ja fyysisestä, sosiaalisesta sekä kulttuurisesta toimintaympäristöstä koostuvaksi kokonaisuudeksi, jonka vaikutuspiirissä opiskelu ja oppiminen tapahtuvat [45]. Tämä määritelmä on laaja ja siinä oppimisympäristö nähdään käsitteenä, joka sisältää kaikki muut opiskelu- ja oppimisympäristöihin liittyvät määrittelyt. Käsitettä voidaan soveltaa verkko-oppimisympäristöihin, sillä ne rakentuvat vahvasti sosiaalisen ja kulttuurisen toimintaympäristön puitteissa. Kaikki verkko-opetukseen osallistuvat ovat yleensä tiedossa sekä sosiaalisten ja kulttuuristen normien rikkomisesta rangaistaan.

Tietoverkkojen avulla tuotetusta oppimisympäristöstä käytetään määritelmää virtuaalinen oppimisympäristö. Manninen ja Pesonen määrittelevät virtuaalisen oppimisympäristön telemaattisin välinein (sähköposti, tietokonekokoukset, www, videoneuvottelu, puhelin, audiografiikka ja cd-rom) toteutetuksi, yleensä etäopetuksessa käytetyksi oppimisympäristöksi. Virtuaalisuudella tarkoitetaan mahdollista tai kuviteltavissa olevaa tilaa, joka rakennetaan tietoverkkojen ja tekniikan avulla. Virtuaalisuudesta puhutaan usein, kun jostain ilmiöstä saadaan tieto- ja viestintätekniikan avulla havaintoja ja aistimuksia, jotka vaikuttavat lähes samalta kuin todellisuudessa. Oppimisympäristö on tällöin ainakin näennäisesti todellisuutta vastaava [35].

Oppimisympäristö voi tarkoittaa myös jotain, joka on päämme sisällä ja joka syntyy ja elää dialogissa toisten ihmisten kanssa. Tellan ja Mononen-Aaltosen mukaan oppimisympäristö viittaa ensiksi oppijan pään sisällä muodostamaan mentaalimalliin ulkoisesta todellisuudesta. Tämä on oppijan sisäinen representaatio oppimisympäristöstään, eikä siihen voi vaikuttaa opettajan suoralla toiminnalla, vaan ainoastaan opiskeluympäristön kautta. Hyvin suunniteltu tavoitteellinen opiskeluympäristö voi parhaimmillaan tukea oppimisympäristön muotoutumista. Oppija käy dialogia ympäristönsä, siis sekä muiden ihmisten, kirjojen että käytettävän teknologian, kanssa. Tällainen tulkinta on tärkeä verkkoympäristössä, sillä siinä viestintä ja kanssakäyminen tapahtuu juuri teknologian kautta [35].

3 TKK:n ja VHB:n matematiikan verkko-opetushanke

Tutkimuksessa tarkasteltu virtuaalinen matematiikan peruskurssi toteutettiin suomalais-saksalaisena yhteistyönä Baijerin virtuaaliyliopiston (VHB) kanssa. Projektin Suomen osuudesta on vastuussa Suomen virtuaaliyliopisto (SVY) ja Teknillinen korkeakoulu. Kyseessä on pilottihanke, joka on herättänyt laajaa kiinnostusta Suomessa ja ulkomailla. Hanketta johtaa Suomen osalta opettava tutkija Antti Rasila [54]. Matematiikan tutkimuksessa on aina ollut paljon kansainvälistä yhteistyötä ja tietokoneiden käytössäkin TKK:n matematiikan laitoksella on pitkä perinne. 1990-luvulta saakka on ollut käynnissä esimerkiksi emerituslehtori Simo K. Kivelän MatTaFi-projekti [33].

Tästä huolimatta matematiikan verkko-opetusta on järjestetty vain vähän, mikä johtuu muun muassa siitä, että matemaattisten kaavojen esittäminen verkossa ja myös tuottaminen on ollut hankalaa etenkin opiskelijoille. Tässä asiassa on tapahtunut kuitenkin paljon kehitystä viime vuosina mm. MatTaFi-projektin puitteissa [33]. Projektissa jatkokehitettiin esimerkiksi tässäkin työssä aiheena olevaa Chris Sangwinin kehittämää automaattista tehtävien STACK-tarkastusjärjestelmää. Kansainvälisellä yhteistyöllä tavoitellaan mm. materiaalin käytön laajentamista.

Virtuaalinen matematiikan peruskurssi oli jo käytännön syistäkin johtuen englanninkielinen. Sitä tarjottiin Teknillisessä korkeakoulussa erityisesti ulkomaalaisille opiskelijoille sekä niille, joilla tavallinen lähiopetukseen perustuva matematiikan peruskurssi ei sovi aikatauluihin. Kurssia tarjottiin myös JOOPAS-järjestelmän [19] ja yhtenä rahoittajana toimineen Suomen virtuaaliyliopiston kautta muihin yliopistoihin. Kurssi oli sisällöltään ja vaikeusasteeltaan likimain vastaava kuin Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1 TKK:lla. Koko kurssia ei toteutettu yhteistyönä VHB:n kanssa, sillä eri tahojen kurssien sisällöissä oli joitakin eroavaisuuksia. Yksi näistä on TKK:n kurssilla oleva lineaarialgebran osuus, jota ei muilla kursseilla ole. Materiaalit ovat modulaarisia ja muunneltavissa. Niitä voidaan tulevaisuudessa käyttää useammassakin suomalaisessa ja ulkomaalaisessa yliopistossa.

Teknillisessä korkeakoulussa kurssi järjestettiin siten, että luennoitsija julkaisi kurssin teoriaosuuden Internetissä. Julkaisemiseen käytettiin Matti Harjulan kehittämää htex-koodia. Jokainen opiskelija luki teoriat itsenäisesti ja tutustui esimerkkeihin. Tarjolla oli myös käsiteltäviä aiheita täydentäviä luentoja kaksi tuntia viikossa. Näillä luennoilla oli mahdollisuus myös kysellä epäselviä asioita luennoitsijalta. Kerran viikossa järjestettiin laskuharjoitukset, joissa ohjaaja esitti etukäteen annettujen tehtävien ratkaisut taululla. Lisäksi opiskelijat tekivät STACK:lla laadittuja automaattisesti tarkastettavia tehtäväsarjoja, joita oli yksi sarja viikossa. Harjoituksia tekemällä sai lisäpisteitä, jotka otettiin huomioon kurssin arvostelussa. Kurssilla oli käytössä myös Optima-oppimisympäristö [6], jossa julkaistiin mm. tehtävien malliratkaisuja. Lisäksi kurssilla oli normaalin tapaan kolme välikoetta.

Kyseessä oli siis kokeilukurssi, mutta kansainvälinen yhteistyö jatkuu toivottavasti myös tulevaisuudessa. Myöhemmin yhteistyötä on mahdollista laajentaa esimerkiksi useampien maiden tai yliopistojen kesken. Materiaalin englanninkielisyys luo mainiot puitteet monikansalliseen toimintaan, ja materiaali on tarkoitus kääntää myös muille kielille.

4 Automaattisesti tarkastettavat tehtävät

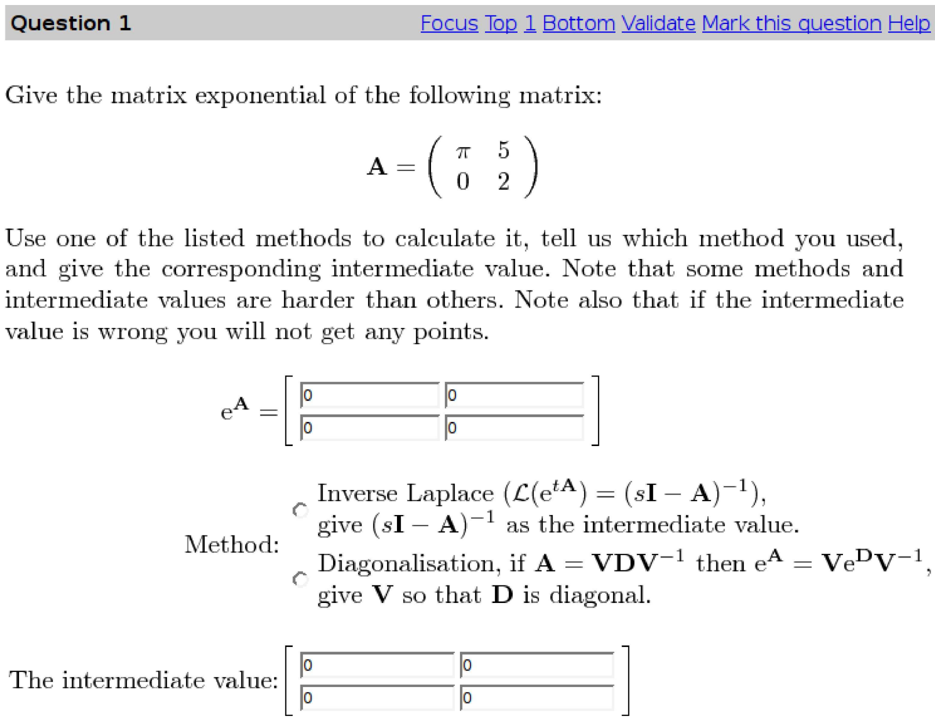
4.1 STACK

Nykyään tietokoneet ja muu informaatioteknologia ovat kehittyneet niin paljon, että opiskelijat eivät enää halua opiskella pelkän kynän ja paperin avulla, etenkään teknillisissä yliopistoissa. On alettu kehittämään uudenlaisia opetusmetodeja, jotka aktivoivat opiskelijoita. Vaikeinta on saada sellaiset opiskelijat, jotka pitävät matematiikkaa liian vaikeana, aktivoitumaan. Teknillisessä korkeakoulussa on kehitelty digitaalisia opetusjärjestelmiä tavoitteena parantaa opetuksen tasoa [44].

STACK (System for Teaching and Assesment using a Computer algebra Kernel) on työn aiheena olevassa projektissa käytettävä tietokoneavusteinen matemaattisten tehtävien tarkastusjärjestelmä. Sen alkuperäinen kehittäjä on Chris Sangwin Binghamin yliopistosta. Hän kehitti symbolisen laskennan ohjelmisto CAS:iin (Computer algebra system) perustuvan järjestelmän, joka mahdollistaa opiskelijoiden vastausten kirjoittamisen algebrallisessa muodossa. Monissa aikaisemmissa vastaavissa järjestelmissä oli mahdollisia vain sellaiset tehtävät, jossa opettaja antaa useamman mahdollisen vastausvaihtoehdon ja opiskelijan tarkoituksena on valita näistä oikea. Tämä saattoi johtaa liian pintapuoliseen opiskeluun [47]. Toinen tavoite oli saada opettajille järjestelmä, jonka avulla on helppo tehdä tehtäviä omaan käyttöön. Aikaisempien järjestelmien, kuten AiM:in, käyttö vaati opettajilta ohjelmointitaitoja [47, 52].

Teknillisen korkeakoulun Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksella (aikaisemmin Matematiikan laitos) on edelleenkehitetty STACK-järjestelmää TKK:n opetuksen vaatimuksia vastaavaksi. Kehitystyössä on ollut tärkeässä osassa Matti Harjula, joka käsitteli diplomityössään järjestelmää ja sen käyttöä [11]. Opiskelijoiden näkökulmasta STACK näyttää yksinkertaiselta Internetpalvelulta, jossa on tehtäviä tietyssä järjestyksessä. Kun järjestelmää tutkii tarkemmin, tulee ilmi paljon erilaisia ominaisuuksia. Harjula esitteli työssään erilaisia tehtävätyyppejä, joita STACK:lla voi toteuttaa. Ne voidaan jakaa valintatehtäviin ja avoimiin tehtäviin. Valintatehtävillä tarkoitetaan sellaisia, joissa vastaus on näkyvissä ja oppilaan täytyy vain osata valita oikea vaihtoehto. Näiden tehtävien etu on se, että vastausvaihtoehtoja on rajoitetusti ja vastausten syöttämisessä ei tule syntaksivirheitä [11].

Avoimet tehtävät ovat sellaisia, joissa vastaus annetaan matemaattisessa muodossa tyhjään vastauskenttään. Vastaus täytyy olla tietyssä muodossa, jotta järjestelmä tunnistaa sen oikeaksi. Kuitenkin, jos opiskelija kirjoittaa vastauksen väärässä muodossa, esimerkiksi kirjoittaa $x(x+1)$ oikean muodon $x * (x + 1)$ sijaan, järjestelmä antaa virheilmoituksen. Opiskelija voi korjata vastauksen muotoa ja yrittää uudelleen. Yleisimpiä tehtäviä on esimerkiksi tehtävä, jossa pyydetään antamaan jonkin funktion derivaatta tai integraali. Ohjelma tarkistaa opiskelijan vastauksen vertaamalla sitä opettajan vastaukseen vähentämällä vastaukset toisistaan ja tarkastamalla, onko tulos nolla. Tehtävän laatijan ei edes tarvitse laskea integraalia itse etukäteen, vaan ohjelma tekee senkin valmiiksi. Oletusarvoisesti vastauksissa voi esiintyä myös CAS-käskyjä. Laatija voi kieltää tiettyjen sanojen, esimerkiksi `integrate`-komennon, käytön vastauksessa. Kysymys voi olla myös sellainen, jossa oppilasta pyydetään antamaan esimerkki jostain funktiosta, esimerkiksi funktio, jonka nollakohtia ovat 1 ja 2. Tarvittaessa STACK voi myös laatia tehtäviä, jotka liittyvät kuvioihin ja kuvaajiin. Vastaajaa voidaan pyytää esimerkiksi siirtämään funktion kuvaaja oikealle kohdalle [11]



Kuva 1: Esimerkki STACK-tehtävästä

Tehtävistä voi tehdä satunnaistettuja, jolloin tehtävässä esiintyvien vakioiden arvot voidaan arpoa jokaiselle opiskelijalle erikseen. Esimerkiksi voidaan muodostaa yhtälö $x - a = 0$, jossa a:n arvo vaihtelee 1:n ja 9:n välillä. Tällöin eri opiskelijat saavat erilaiset tehtävät. Toisaalta opiskelija voi myös harjoitella useamman kerran samaa tehtävää eri alkuarvoilla. Tämä auttaa rutiininomaisessa harjoittelussa, joka on tärkeää monilla yliopistotasoisillakin matematiikan kursseilla. On jopa ehdotettu, että satunnaistamisen avulla koetehtävät voitaisiin julkaista etukäteen. Tällöin opiskelijat voisivat harjoitella niin paljon kuin haluavat, ja silti tenttiin tullessa heillä on erilaiset versiot tehtävistä. [48].

Opiskelijan tehtävästä saamasta palautteesta voi halutessaan tehdä yksityiskohtaisempaa ja opiskelijan vastauksesta riippuvaa. Yleisimmät virhetyypit voidaan määrittää ja antaa näiden mukaan ohjaavaa palautetta. Esimerkiksi integrointitehtävän väärän vastauksen palautteen voi muotoilla seuraavasti [47]:

> Antamasi funktion derivaatta tulisi olla sama kuin funktio, jota pyydettiin integroimaan. Kuitenkin vastauksesi derivaatta x:n suhteen on \[@$diff(sa, x)$@\], joten olet tehnyt jotain väärin.

Tietyn väärän vastauksen vaikutuksen arvosteluun voi myös määritellä erikseen. Tehtävän pisteytyksen voi jakaa myös osiin, jolloin tietyn osion oikeasta ratkaisusta saa tietyn määrän pisteitä. Esimerkkinä tästä on derivaattatehtävä, joka sisältää a-, b- ja c-kohdat. Tällaisessa tehtävässä on järkevintä antaa yksittäisistä kohdista pisteitä, vaikka koko tehtävä ei olisikaan ratkaistu oikein.

Kurssilla käytetyissä tehtävissä on mukana myös malliratkaisut. Niiden kulku riippuu annetuista parametreistä. Opiskelija saa malliratkaisut käyttöönsä, kun tehtävien vastausaika on päättynyt ja opiskelija on vastannut tehtäviin. Tällöin opiskelija voi tarkistaa mahdolliset virhekäsityksensä tai tutustua erilaisiin tapoihin ratkaista tehtävä.

On pohdittu, lisäävätkö automaattisesti tarkastettavat tehtävät matematiikan opetuksen laatua ja opiskelijoiden oppimista [42, 44]. Näillä tehtävillä voidaan täydentää perinteistä matematiikan opetusta varsinkin mekaanisen harjoittelun osalta. Omakohtaista opiskelua ja erityisesti harjoitustehtävien ratkaisemista on pidetty matematiikan opiskelussa tärkeänä. Harjoitustehtäviä voidaan liittää myös osaksi verkko-opetusta, niin kuin tutkittavalla kurssillakin on tehty.

Automaattisen tarkastuksen teknologia on herättänyt kiinnostusta myös TKK:n ulkopuolella. Esimerkiksi Antti Rasila esitteli TKK:n käyttämää STACK-ohjelmistoa ja tehtyjä tehtäviä lukion opettajille LUMA-päivillä 24.10.2008 [43]. Paikalla olleet opettajat olivat kiinnostuneita tehtävistä, ja osa ottikin yhteyttä jälkikäteen. Kolmessa lukiossa on nyt otettu käyttöön TKK:lla tehtyjä lukio-opetukseen sopivia tehtäviä. Koulujen abiturientit ovat käyttäneet näitä tehtäviä pitkän matematiikan kertaukseen. Lukiotasoisillekin tehtäville on siis kysyntää. Teknillisen korkeakoulun rajallisten resurssien vuoksi olisi hyvä, jos lukioiden opettajat oppisivat myös itse tekemään tehtäviä omaa opetustaan varten STACK-ohjelmistolla.

4.2 Tehtävien tekninen toteutus

Tämän työn yhteydessä kirjoittaja on tehnyt noin 150 STACK-tehtävää Teknillisen korkeakoulun käyttöön. Lähes kaikkiin tehtäviin on tehty myös malliratkaisut, joiden kulku riippuu satunnaisten parametrien arvoista. Työn aiheena olevan kurssin lisäksi tehtäviä on tehty muun muassa aloitteleville opiskelijoille lukioasioiden kertausta varten.

Esimerkkitehtävänä tässä käytetään kirjoittajan Mat-1.1610 Mathematics 1 -kurssille tekemää englanninkielistä Distance from a point to a line - tehtävää. Siinä pyydetään laskemaan etäisyys annetusta pisteestä annetulle suoralle. Tehtävä liittyy kurssilla käsiteltäviin asioihin, ja vastaavanlainen tehtävä on ollut aikaisempina vuosina käytössä tavallisissa laskuharjoitustehtävissä. Tehtävänanto oli seuraava:

`Let` $x = (1, 2)$`. Find the distance of` x `from the line` $y\mathbb{R}$`,`
`where` $y = (3, 4)$`.`
`Give an approximate value of your answer to three (3) decimals.`
`Use dot . as the decimal separator.`

Tehtävän laatiminen aloitetaan määrittelemällä muuttujien arvot. STACK:n Tehtävän muuttujat-kohtaan kirjoitetaan ensin tarvittavat muuttujat ja määritellään niiden arvojen vaihtelu. Tässä tehtävässä oli neljä eri muuttujaa, joiden arvo on kokonaisluku -9:n ja 9:n tai 1:n ja 9:n välillä. Tehtävästä on siis yli 100 erilaista versioita. Määriteltyjen muuttujien avulla on määritelty tehtävässä tarvittavat esimerkiksi tehtävänannon kannalta merkittävät muut parametrit. Myös oikea ratkaisu on määritelty tässä kentässä, sillä se luonnollisesti riippuu annetuista parametreista. Seuraavassa on kuvattuna, miten muuttujat on määritelty:

```
x1 = rand([-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6,7,8,9])
x2 = rand([-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6,7,8,9])
y1 = rand(listify(setdifference({1,2,3,4,5,6,7,8,9},{x1})))
y2 = rand(listify(setdifference({1,2,3,4,5,6,7,8,9},{x2})))
pxy = x1*y1+x2*y2
```

```
pyy = y1^2+y2^2
// Lähimmän pisteen koordinaatit:
p1 = pxy/pyy*y1
p2 = pxy/pyy*y2
// Malliratkaisun muita välivaiheita:
v1 = x1-p1
v2 = x2-p2
tans = sqrt(v1^2+v2^2)
TAns = decimalplaces(tans,3)
```

Tehtävän runko -kohtaan kirjoitetaan varsinainen tehtävänanto. Siihen tarvittavat parametrit määriteltiin muuttujat-kohdassa. Tehtävänannon matemaattinen teksti kirjoitetaan LaTeX-tekstinä. Vastauslaatikoita voi laittaa useampia. Esimerkkitehtävässäkin on kaksi vastauslokeroa. Tehtävästä saatavat pisteet voi määrittää miten haluaa, esimerkiksi siten, että ensimmäisestä kohdasta saa puoli ja toisesta puoli pistettä.

Mallivastaus-kohtaan kirjoitetaan tehtävän ratkaisu kokonaisuudessaan. Ratkaisun välivaiheet riippuvat annettujen parametrien arvoista, joten välivaiheisiinkin liittyvät arvot on määriteltävä muuttujat-kohdassa. Täydellisen malliratkaisun kirjoittaminen onkin yksi aikaa vievimmistä kohdista tehtävää tehdessä.

```
If $x=(@x1@,@x2@)$ and $y=(@y1@,@y2@)$, then
\[
\begin{cases}
x\cdot y = (@x1@)(@y1@)+(@x2@)(@y2@)=@pxy@ \\
y\cdot y = (@y1@)^2+(@y2@)^2=@pyy@.
\end{cases}
\]
It follows that
\begin{eqnarray*}
P_y(x) & = & \left( x\cdot \frac{y}{||y||} \right) \frac{y}{||y||} \\
& = & \frac{x\cdot y}{y\cdot y}y \\
& = & \frac{@pxy@}{@pyy@}(@y1@,@y2@) \\
& = & \left( @p1@,@p2@ \right) .
\end{eqnarray*}

The distance of a point $x$ to the line $\mathbb{R}y$ is given by
\begin{eqnarray*}
```

```
||x-P_y(x)|| & = & ||(@x1@,@x2@)-\left( @p1@,@p2@\right) || \\
& = & ||\left( @v1@,@v2@\right) || \\
& = & \sqrt{\left( @v1@\right)^2+\left( @v2@\right)^2} \\
& = & @tans@ \\
& \approx & @TAns@.
\end{eqnarray*}
```

Seuraavassa on kuvattu, miltä mallivastaus näyttää opiskelijalle:

If $x = (-8, 3)$ and $y = (3, 6)$, then

$$\begin{cases} x \cdot y = (-8)(3) + (3)(6) = -42 \\ y \cdot y = (3)^2 + (6)^2 = 45. \end{cases}$$

It follows that

$$\begin{aligned} P_y(x) &= \left(x \cdot \frac{y}{||y||} \right) \frac{y}{||y||} \\ &= \frac{x \cdot y}{y \cdot y} y \\ &= \frac{-42}{45} (3, 6) \\ &= \left(-\frac{14}{5}, -\frac{28}{5} \right). \end{aligned}$$

The distance of a point x to the line $\mathbb{R}y$ is given by

$$\begin{aligned} ||x - P_y(x)|| &= ||(-8, 3) - \left(-\frac{14}{5}, -\frac{28}{5} \right) || \\ &= || \left(-\frac{26}{5}, \frac{13}{5} \right) || \\ &= \sqrt{\left(-\frac{26}{5} \right)^2 + \left(\frac{13}{5} \right)^2} \\ &= \frac{13}{\sqrt{5}} \\ &\approx 5.814. \end{aligned}$$

Tämän työn liitteenä on muita kirjoittajan tekemiä STACK-tehtäviä koodeineen (Liitteet 1 ja 2).

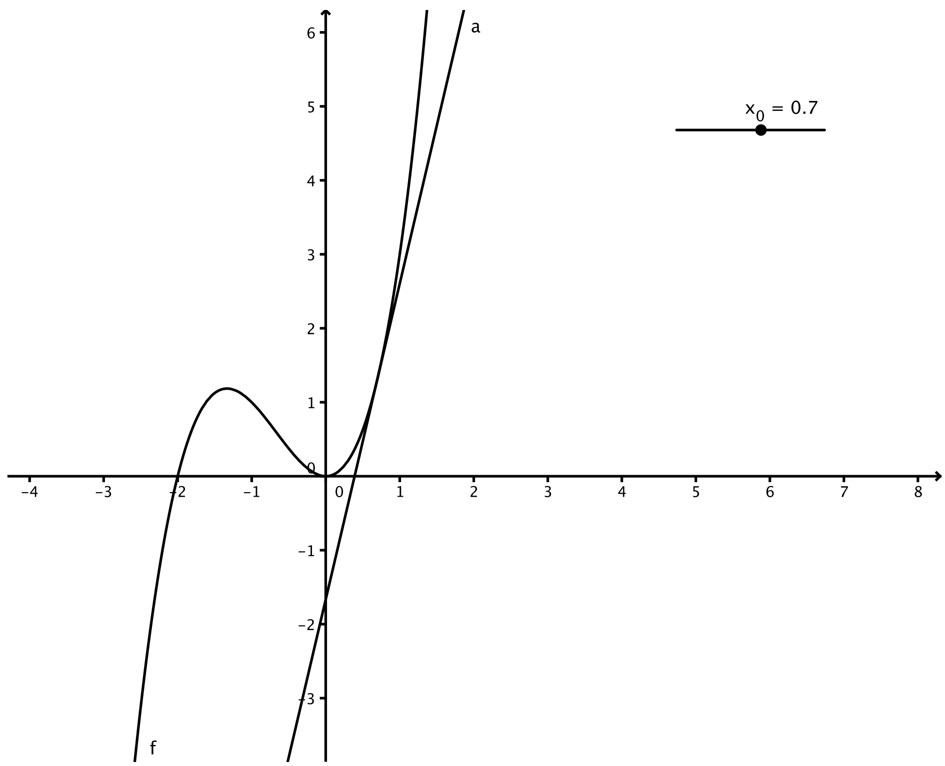
5 Interaktiiviset oppimateriaalit

Yksi matematiikan verkko-opetuksen eduista on se, että verkossa on paljon mahdollisuuksia erilaisten interaktiivisten materiaalien käytölle. Tässä käsiteltävällä matematiikan verkkokurssilla teoreettinen materiaali on esitetty verkossa html-muodossa, ja siihen on lisätty interaktiivisia elementtejä mm. GeoGebra-ohjelmiston avulla [8]. GeoGebra on ohjelmisto, jolla voi esimerkiksi näyttää erilaisia geometrisiä tai algebrallisia käsitteitä havainnollistavia animaatioita. Tällä matematiikan verkkokurssilla GeoGebraa käytetään muun muassa derivaatan havainnollistamiseen. GeoGebra on vapaa ohjelmisto ja ladattavissa ilmaiseksi Internetistä, joten se on kaikkien opiskelijoiden ja opettajien ulottuvissa.

Dynaamiset esimerkit auttavat opiskelijaa keskittymään opiskelussaan olennaisiin asioihin [16]. Kurssin verkkomateriaaliin oli liitetty linkki animaatioon, jossa aihetta esitettiin kuvan avulla (Kuva 2). Animaatiossa oli valmiiksi annettu funktio, jonka tangenttia tarkasteltiin eri pisteissä. Opiskelija pystyi valitsemaan tietyltä väliltä pisteen, johon tangentti piirretään. Opiskelija pystyi täten hyvin havainnollisesti tarkastelemaan, miten tangentti muuttuu funktion eri kohdissa. Tämä auttaa opiskelijaa hahmottamaan derivaatan käsitteen paremmin.

5.1 Oppimisen tukeminen interaktiivisten materiaalien avulla

Itävaltalainen Evelyn Stepancik on tutkinut lukiolaisten ja ammattikoululaisten mielipiteitä eri tietokoneohjelmien käytöstä matematiikan opetuksessa Medienvielfalt am Mathematikunterricht -projektissa [34, 51]. Projektissa kehitettiin tietokoneoppimisalustoja matematiikan eri osa-alueilta. Oppilaiden mielestä tutkituista tietokoneohjelmista (Derive [5], GeoGebra, Excel, Voyage) GeoGebra koettiin käytössä parhaimmaksi. Yli 60 prosenttia opiskelijoista oli sitä mieltä, että interaktiiviset harjoitukset auttoivat matemaattisten käsitteiden ymmärtämisessä. Noin 78 % opiskelijoista taas sanoi ymmärtäneensä kaikki tärkeät oppimisalustan matemaattiset sisällöt. Tulokset kuvaavat sitä, kuinka interaktiiviset materiaalit auttavat opiskelijoita vaikeampien asioiden ymmärtämisessä. TKK:n kurssilla on monia abstrakteja asiasisältöjä, kuten esimerkiksi integraaliin liittyvän Riemannin summan



Kuva 2: Esimerkki GeoGebralla tehdystä animaatiosta

käsite, joiden esittäminen kuvan ja opiskelijan oman tutkimisen avulla helpottaa ymmärtämistä.

Koska interaktiiviset verkkosivut ovat käyttäjän koneelle asennetusta ohjelmistosta riippumattomia, ne voidaan helposti käyttää uudelleen toisilla kursseilla, ja ne ovat käyttökelpoisia käytännössä kaikkialla. Jo nyt on olemassa lukuisia sivustoja, joissa on ilmaisia dynaamisia opetusmateriaaleja. Esimerkkinä tällaisesta on GeoGebraWiki [9], johon on koottu GeoGebralla tehtyjä verkkomateriaaleja usealla eri kielellä ja eri kouluasteille. Kaikki materiaali on vapaasti käytettävissä, ja sitä voi myös muokata omaan käyttöön.

5.2 Kokemuksia interaktiivisten materiaalien käytöstä opetuksessa

Mm. Cathy Cavanaugh on tutkinut interaktiivisten materiaalien käyttöä matematiikan opetuksessa [4]. Tutkimuskohteena oli lukio-opetusta antava virtuaalinen koulu Yhdysvalloissa. Selvityksen aiheena oli muun muassa se, eroavatko oppilaiden tulokset toisistaan kurssilla, jossa käytetään interaktiivisia elementtejä verrattuna kurssiin, jossa näitä ei käytetä. Erityisesti tutkittiin lineaaristen yhtälöiden piirtämistä ohjelmalla, jonka virtuaalikoulun matematiikan asiantuntijat olivat kehittäneet. Osallistujat jakautuivat kahteen ryhmään: ryhmässä, jossa ei käytetty graafisia välineitä, oli 14 oppilasta ja toisessa ryhmässä 33.

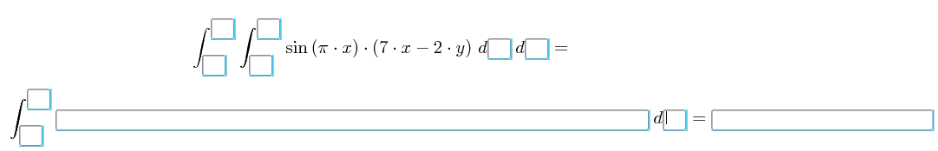
Tutkimuksessa oppilaille teetettiin ensin esitietotesti ja kurssin jälkeen loppukoe. Koska tutkimuksen otos oli pieni, ja ryhmien kokoero suuri, ei tutkimuksesta voida tehdä kovin varmoja tilastollisia päätelmiä. Ryhmän, jossa ei käytetty graafisia työkaluja, esitietotestin keskiarvo oli 17.50/25 ja loppukokeen keskiarvo 19.21/24. Graafisia työvälineitä käyttävä ryhmä taas sai esitietotestistä keskimäärin 15.02/25 pistettä ja loppukokeesta 18.02/25 pistettä. Näyttäisi siis siltä, että oppilaiden loppukokeessa mitatut graafisen kuvaajan piirtämisen taidot parantuivat, kun he käyttivät interaktiivisia työkaluja. Vastaavaa selvitystä on tehnyt myös TKK:lla Simo K. Kivelä. Hän tutki laajan matematiikan L2-kurssin opiskelijoiden mielipiteitä demonstraatiotyökalu DiffEqWeb-ohjelman käytöstä opetuksessa. Tutkimuksen mukaan opiskelijat eivät pitäneet DiffEqWeb-ohjelmaa kovin olennaisena oppimisen kannalta. Syynä saattaa Kivelän mukaan olla se, että kurssikokeessa ei saanut käyttää kyseistä työkalua [23].

6 Kahden verkko-opetusjärjestelmän vertailu

TKK:lla käytetyn järjestelmän lisäksi on olemassa muitakin järjestelmiä, joilla voi laatia matematiikan harjoitustehtäviä verkkoon. Työn kirjoittajan toimiessa aikaisemmin WebALT:in [57] palveluksessa hän teki matematiikan verkkotehtäviä lukiolaisille, ammattikorkeakoululaisille ja Helsingin yliopiston Virtuaalisen analyysin peruskurssin opiskelijoille Maplesoftin kaupallista Maple T.A. -järjestelmää [31] käyttäen. Kirjoittajalla on siis omakohtaisia kokemuksia myös kyseisestä järjestelmästä. Maple T.A. perustuu samanlaisiin lähtökohtiin kuin STACK. Sekin mahdollistaa algebrallisten vastausten syötön ja tehtävien satunnaistamisen [12]. Maple T.A.:ssa ei ole mahdollista antaa opiskelijoille yksilöllistä palautetta, toisin kuin STACK:ssa. Maple T.A.:n käyttöliittymä on myös hieman kankeampi ja hitaampi kuin STACK:n. Järjestelmän kehittäjät pyrkivät kuitenkin ratkaisemaan näitä ongelmia.

WebALT käyttää Chalmersin teknillisen korkeakoulun professori Aarne Rannan kehittämää Grammatical Framework-nimistä kielen generoimisjärjestelmää, jonka tarkoituksena on kääntää Maple T.A-tehtäviä muille kielille, mm. englanniksi, espanjaksi ja ranskaksi [41, 53]. Tehtävät voidaan siis esittää opiskelijoille heidän omalla äidinkielellään, jolloin vähemmistöjen ei tarvitse tuntea itseänsä syjityksi [3]. Tällaista ominaisuutta ei STACK:ssa vielä ole, joten STACK:n tehtävät täytyy käytännössä halutessaan kääntää käsin. Tämä voisi olla käytännöllinen ominaisuus STACK:ssakin. Esimerkiksi suomenkieliset tehtävät olisi hyvä kääntää ainakin ruotsiksi ja tarpeen tullen myös englanniksi. Käytännössä kuitenkaan ainakaan silloin, kun kirjoittaja työskenteli WebALT:lla vuonna 2007, kääntäminen ei vielä sujunut koneellisesti, vaan monet tehtävät piti kääntää käsin. Konekääntämisessä erityisiä vaikeuksia aiheuttaa suomen kielen hankaluus.

TKK:lla on kehitetty STACK:iin paljon uusia ominaisuuksia, ja yksi näistä on täydennettävä vastaus -vaihtoehto. Opiskelijaa voidaan pyytää täydentämään esimerkiksi integraalin ala- ja yläraja vastaukseen (Kuva 3). Tällaista mahdollisuutta ei ole Maple T.A.-järjestelmässä.



Kuva 3: Esimerkki täydennettävästä STACK-tehtävästä

Seuraavaksi esitetään vertailu STACK:n ja Maple T.A.:n toiminnoista:

	STACK	Maple T.A.
Parametrisoidut tehtävät	kyllä	kyllä
Symboliset vastaukset	kyllä	kyllä
Numeeriset vastaukset	kyllä	kyllä
Useampi vastausruutu	kyllä[a]	kyllä
Matriisimuotoinen vastaus	kyllä[b]	kyllä
Monivalinta	kyllä[c]	kyllä
Täydennettävä vastaus -vaihtoehto	kyllä[d]	ei
Essee-kysymykset	ei	kyllä
Tarkistusalgoritmin tyyppi	puu	vapaa
Parametrien valitseminen[e]	eksplisiittinen	implisiittinen
Palautteen muoto[f]	dynaaminen	staattinen
Kysymysaltaat[g]	ei	kyllä
Sähköposti	ei	kyllä
Kääntäminen muille kielille	manuaalisesti	koneellisesti (WebALT-versio)
Kaupallisuus	vapaa ohjelmisto	kaupallinen ohjelmisto

[a] TKK:n STACK:ssa

[b] TKK:n STACK:ssa

[c] TKK:n STACK:ssa

[d] TKK:n STACK:ssa

[e] Miten parametristen tehtävien parametrit on valittu, eli periaatteessa joko määritellään, mitkä parametrit ovat sopivia tai määritellään olosuhteet, jotka parametrien tulee toteuttaa.

[f] Riippuuko palaute vastauksesta, eli voiko antaa kohdennettua palautetta tiettyyn ongelmaan vai onko palaute vain staattista oikein/väärin-tyyppiä.

[g] Kaikki kysymykset voidaan valita satunnaisesti kysymysaltaasta, eli tehtäväsarjassa voi olla eri kysymykset eri opiskelijoille, eikä vain eri parametrit.

Helsingin yliopiston virtuaalinen analyysin peruskurssi käsitteli vuonna 2007 suurelta osin samoja asioita kuin tässä käsiteltävä tutkittava TKK:n matematiikan peruskurssi Mathematics 1. Alla olevassa taulukossa vertaillaan näiden kahden kurssin toteutusta työn kirjoittajan kokemusten perusteella.

	Mathematics 1	**Virtuaalinen analyysin peruskurssi**
Opetusmuoto	monimuoto-opetus	verkko-opetus
Kansainvälisyys	kansainvälinen	kansallinen[a]
Opetuskieli	englanti	suomi
Tehtäväjärjestelmä	STACK	Maple T.A.
Oppimisympäristö	Optima	Blackboard
Volyymi	pieni	pieni
Interaktiivisuus	GeoGebra, Flash	WIRIS-laboratorio
Luentojen nauhoitus	ei	kyllä
Ulkopuolisia osallistujia	kyllä	kyllä

[a]Opetusmateriaalit kuitenkin käytössä USA:ssakin

Helsingin yliopiston kurssi järjestettiin täysin virtuaalisesti. Ainoastaan kurssikokeisiin piti tulla paikan päälle yliopistolle. Luennot pidettiin Ivocalize-ohjelman avulla Internetissä. Kurssilla oli oma ”luokkahuone”, johon kokoonnuttiin kaksi kertaa viikossa. Kurssin luennoitsija, professori Mika Seppälä esitti teorian Power Point-esityksenä ja samalla selitti asioita mikrofonin avulla. Opiskelijat saivat teoriaosuuden aikana tai sen jälkeen kommentoida käsiteltyä asiaa joko keskusteluikkunassa tai omaan mikrofoniin puhuen. Tällainen kommentointi jäi kylläkin valitettavan vähäiseksi. Luentojen aikana opiskelijat tekivät myös muutaman Maple T.A.-tehtävän, jolloin opettaja sai välitöntä palautetta opiskelijoiden osaamisesta. Tämä on suuri etu muihin luennointitapoihin verrattuna: opettaja saa harvoin näin nopeaa palautetta opiskelijoiden oppimisesta. Myös kurssin laskuharjoitukset järjestettiin virtuaalisesti. Tehtävät tuli palauttaa laskuharjoitusten ohjaajalle sähköisesti ja harjoitusten aikana käytiin tehtävät läpi. Välillä, jos käsiteltävä aihe oli erityisen haastava, oli tarjolla myös Maple T.A:lla tehtyjä lisätehtäviä.

Virtuaaliluennot nauhoitettiin ja nauhoitteet tallennettiin Blackboard-oppimisympäristöön, jolloin kurssin osallistujat saattoivat kuunnella luennot myös jälkikäteen, jos he eivät päässeet varsinaiselle luennolle. Tämä vähensi entisestään pakollista paikkaan ja aikaan sidottua toimintaa. Opiskelijat pystyivät siis opiskelemaan hyvin paljon omassa tahdissaan. TKK:n kurssilla oli lähitapaamisiakin, mm. laskuharjoituksia ja täydentäviä luentoja. Näissä paikalla olo saattaa helpottaa useimmilla huomattavasti opiskelua.

Kurssi erosi TKK:n kurssista muutenkin kuin opetusmuodon perusteella. Se järjestettiin suomenkielisenä, mutta toisaalta luennoitsija Mika Seppälä on pitänyt samasta aiheesta virtuaaliluentoja myös USA:ssa Florida State Universityssä. Osa luentokalvoista olikin USA:ssa aikaisemmin käytettyjä kalvoja. Tämä periaatehan toimii myös TKK:n kurssilla. Koska materiaali on englanninkielistä, sitä voi käyttää laaja joukko opiskelijoita eri maista ja eri oppilaitoksista. Molemmilla kursseilla on myös laitoksen ulkopuolisille opiskelijoille järjestetty mahdollisuus osallistua kurssille. Helsingin yliopiston kurssilla oli esimerkiksi yksi lukiolainen, joka oli jo saanut kaikki lukion matematiikan kurssit suoritettua ja halusi syventää tietojaan. Tällaisilla henkilöillä ei välttämättä ole aina mahdollisuutta tulla paikanpäälle kuuntelemaan luentoja, joten virtuaaliopetus on heille hyvä vaihtoehto.

Molemmilla kursseilla oli käytössä myös interaktiivisia elementtejä. Helsingin yliopiston kurssilla käytettiin WIRIS-virtuaalilaboratoriota [58] , jolla pystyi mm. havainnollistamaan funktioiden kulkua, kun taas TKK:n kurssilla oli käytössä edellä mainittu GeoGebra-ohjelma. Helsingin yliopiston kurssilla oli enemmän budjetoituja resursseja ja suurempi rahoitus kurssin järjestämiseen, mikä osaltaan heikentää kurssien vertailtavuutta keskenään. Yhteistä molemmille kursseille oli pieni osanottajamäärä. Syy tähän voi olla se, että verkko-opetus on vielä uusi ilmiö, ja monet vierastavat sitä. Lisäksi TKK:lle otetaan ei-suomenkielisiä opiskelijoita vasta kandidaattivaiheen jälkeen, minkä vuoksi kurssi ei ole näille opiskelijoille pakollinen.

7 Pedagoginen viitekehys

7.1 Verkko-opetuksen oppimiskäsitykset

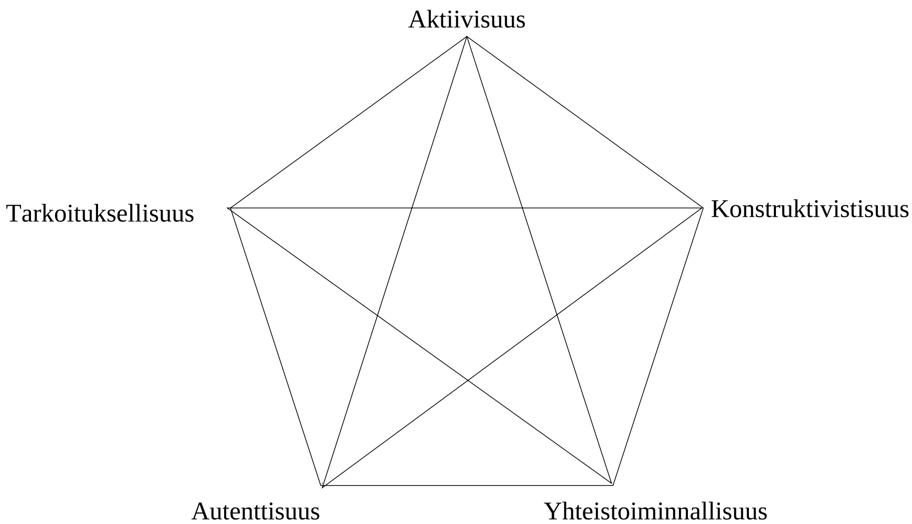
Korkeakouluopetuksessa on viime vuosina siirrytty opettajajohtoisesta opettamisesta oppilaskeskeisemmän opetuksen suuntaan [2]. Verkko-opetuksen ja pedagogiikan lähtökohtina pidetään tiettyjä oppimiskäsityksiä, joista kirjallisuudessa esiintyvät eniten konstruktivistinen oppiminen, itseohjautuva oppiminen ja yhteistoiminnallinen oppiminen [22]. Matematiikan opetuksessa on Jarkko Leinon [29] mukaan useampia eri konstruktivistisia suuntauksia. Konstruktivismi painottaa aina oppijan osuutta tiedon muodostamisessa ja oppijan aikaisemmilla tiedoilla on olennainen osa uuden asian oppimisessa.

Hän konstruoi tietonsa ja omakohtaisen havainnoinnin ja järkeilyn tuloksena vakuuttuu sen oikeellisuudesta. Tässä tiedolla voidaan tarkoittaa kolmea erilaista lajia: tuntemistieto (esim. tiedän Matti Meikäläisen), taitotieto (tiedän, miten pyörällä ajetaan) ja propositionaalinen tieto (tiedän, että kuu kiertää maata) [26]. Tieto ei ole kuitenkaan vain yksilön konstruktio. Yksilökeskeisen konstruktivismin rinnalle onkin viimeisen kymmenen vuoden aikana kehittynyt moninainen konstruktivistinen teoriajoukko, kuten sosio-kulttuurinen ja sosiaalinen konstruktivismi. Näiden teorioiden yhteinen nimike on sosiaaliperspektiivinen konstruktionismi.

Konstruktivismin toteutuminen matematiikan opetuksessa on välillä hieman hankalaa. Varsinkaan yläasteella ja lukiossa ei kaikkia asioita pystytä eikä ole tarkoituksenmukaistakaan todistaa. Toisaalta harvat käsiteltävät asiat ovat sellaisia, että opiskelijat pystyisivät niitä itse todistamaan, joten todistaminen on monesti opettajajohtoista. Jotkut matemaattiset kaavat on siis vain annettava valmiina oppilaiden käyttöön. Teknillisen korkeakoulun matematiikan peruskursseilla opiskelijamäärät ovat todella suuria ja luennoilla onkin lähinnä opettajajohtoista opetusta. Toisaalta laskuharjoitusryhmissä on hieman oppilaskeskeisempää opetusta, ja monissa harjoituksissa opiskelijat esittävät omat tehtävän ratkaisunsa taululla. Massaluennoista ei ole resurssien rajallisuuden vuoksi järkevää luopua. Toisaalta tulevan kolmen korkeakoulun yhteenliittymän, Aalto-yliopiston, yksi tavoitteista on juurikin opettaja-oppilas lukumääräsuhteen parantaminen [1]. Tämä onnistuu joko henkilökuntaa lisäämällä tai opiskelijoiden sisäänottoa vähentämällä. Tässä tullaan taas resurssikysymykseen: onko varaa lisätä henkilökuntaa, vai onko pakko vähentää opiskelijamääriä?

7.2 Verkko-opetus ja mielekäs oppiminen

Muun muassa Jonassen on määritellyt mielekkään oppimisen kriteerejä (Kuva 3) [18]. Mielekäs oppiminen on aktiivista. Tutkimuksen kohteena olevalla matematiikan peruskurssilla ei pelkästään lueta tekstiä tietokoneruudulta, vaan kokeillaan myös itse erilaisia animaatioita. Kurssi painottaa konstruktivismin mukaisesti oppilaan omaa osuutta tiedon muodostamisessa. Opiskelijat ovat valinneet kurssin, koska se kuuluu heidän opintoihinsa ja siitä on hyötyä myös tulevan ammatin kannalta. Kurssi on siis myös tarkoituksenmukainen. Mukana on tosielämään liittyviä esimerkkejä, joten kurssi on



Kuva 4: **Viisi mielekkään oppimisen kriteeriä Jonassen et al.:a [18, s.6] mukaillen.**

myös autenttinen. Opiskelijoilla on mahdollisuus yhteistoiminnallisuuteenkin kurssin aikana esimerkiksi niin kutsutun laskutuvan muodossa. Laskutuvassa opiskelijat voivat ratkaista yhdessä harjoitustehtäviä ja tarvittaessa kysyä laskutuvan ohjaajalta apua. Kokonaisuudessaan kurssi perustuu suurilta osin itseohjautuvaan oppimiseen.

Kaikessa oppimisessa, myös verkko-opetuksessa, on tärkeää kehittää myös korkeamman ajattelun taitoja. Verkkomateriaalia tehtäessä on siis otettava huomioon myös ns. tehokas oppiminen (engl. effective thinking). Ajattelun taidot voidaan Joliffen, Ritterin ja Stevensin [17] mukaan jakaa seuraaviin kategorioihin:

1. Ideoiden tai vaihtoehtojen muodostaminen.
2. Systeemin osa-alueiden ja niiden välisten suhteiden analysointi.
3. Vaihtoehtojen vertailu.
4. Päätelmien ja tulkintojen teko aineistosta.
5. Vaihtoehtojen arviointi kriteerejä käyttäen.
6. Oman ajattelun tarkkailu, seuranta ja uudelleen arviointi.

Kategoriat voidaan luokitella siten, että ensimmäinen kategoria kuvaa luovaa ajattelua, kategoriat 2-5 kriittistä ajattelua ja kategoria 6 metakognitiota. Hyvä ajattelu tarkoittaa näiden kaikkien kategorioiden yhdistelmää. Jos halutaan kehittää kaikkia näitä osa-alueita verkko-opetuksessa, täytyy noudattaa jokaista kategoriaa systemaattisesti ja vastata jokaisen kohdalla seuraaviin kysymyksiin:

1. Mitkä ovat verkko-opetuksen rajoitukset tässä ajattelun kategoriassa, ja miten niitä voidaan kompensoida?
2. Mitä mahdollisuuksia on lisätä tämän kategorian ajattelutaitoja, ja mitä muita ominaisuuksia siihen pitää sisällyttää?

Tutkimuksen aiheena olevalla verkkokurssilla tulee pohdittua paljon asioiden välisiä yhteyksiä, sillä opiskelu on itsenäistä. Interaktiivisten esimerkkien avulla voidaan tehdä päätelmiä ja tulkintoja aineistosta. Omaa ajattelua tulee tarkkailtua ja seurattua STACK-ohjelmistolla tehtävien matematiikan tehtävien avulla; opiskelija saa välitöntä palautetta oppimisestaan.

7.3 Hyvän verkko-opetuksen ominaisuuksia

John Keller on kehittänyt ARCS (attention, relevance, confidence, satisfaction)-mallin hyvän ja motivoivan verkko-opetuksen ominaisuuksista [49]. Sen mukaisesti verkko-opetuksen ja verkkomateriaalin on:

1. Herätettävä oppilaan mielenkiinto ja huomio (attention).
2. Oltava opiskelijalle relevanttia (relevance).
3. Tuettava opiskelijaa siten, että hän kokee olevansa varma osaamisestaan (confidence).
4. Annettava opiskelijalle tapa, jolla hän voi osoittaa osaamisensa (satisfaction).

Tässä käsiteltävällä matematiikan verkkokurssilla ehdot täyttyvät seuraavasti:

Ehto 1: Verkkokurssilla on interaktiivisia esimerkkejä, joissa on käytetty apuna mm. Geogebra-ohjelmaa. Nämä esimerkit auttavat opiskelijaa ymmärtämään opetetun asian ja herättää myös opiskelijan mielenkiinnon.

Ehto 2: Verkkokurssin materiaalit ovat asiantuntijan laatimia. Materiaaleissa käytetään pohjana vanhoja, aikaisemmin matematiikan peruskursseilla olleita materiaaleja. Todistukset on pyritty esittämään tavalla, jolla heikommatkin opiskelijat pysyvät niiden kulussa mukana.

Ehto 3: Verkkokurssin teoriaosuuden yhteydessä on niin sanottuja ”Quick thought” -tehtäviä, joiden kohdalla opiskelija voi testata, onko ymmärtänyt käsiteltävän asian. Lisäksi kurssilla on runsaasti tietokonepohjaisia STACK-harjoitustehtäviä.

Ehto 4: Opiskelija saa välitöntä palautetta STACK-harjoituksistaan ja hän voi niitä tekemällä kerätä lisäpisteitä kurssille. Kurssilla on käytössä myös perinteinen palautettavien harjoitusten systeemi, jossa opiskelija palauttaa harjoitustehtäviä assistentille, joka tarkastaa ja pisteyttää ne. Opiskelijat voivat saada myös vertaispalautetta muilta opiskelijoilta esimerkiksi laskutuvassa.

Michael Uljens tutki väitöskirjassaan [56] niin sanottua opetus-opiskelu-oppimisprosessia (engl. TSL). Hän tutki näiden kolmen tekijän välisiä suhteita ja miten ne vaikuttavat toisiinsa. Opetus on tietojen ja taitojen levittämistä, se ei kuitenkaan aina välttämättä johda oppimiseen. Oppiminen voi olla opettamisen tulosta, mutta toisaalta oppimista voi tapahtua myös ilman opettamista. Asian voi oppia, vaikka kukaan muu ei sitä vielä olisikaan oppinut (vrt. tutkijat). Opiskelu ei välttämättä johda todelliseen oppimiseen; ei riitä, että opettaja opettaa, hänen on myös saatava oppilaat oppimaan. Oppiminen tapahtuu oppilaan oman aktiivisen ajattelun tuloksena. Esimerkkinä opetustilanteesta voisi olla sellainen, jossa opettaja opettaa ja opiskelija kuuntelee. Tentissä opiskelija ei kuitenkaan osaa opetettua asiaa. Ongelmana on se, että opiskelija ei *oppinut* asiaa syvällisesti, vaikka opiskelikin sitä. Opettajan on siis kiinnitettävä opetuksessaan huomiota myös oppilaiden oppimisprosessiin [56].

7.4 Verkko-oppimisympäristöt

Oppimisympäristöjen muutoksessa olennaisena osana on ollut oppijan aseman vaihdos objektista subjektiksi. Tätä pyritään tukemaan kasvatuksen muilla keinoilla. Tämä ei kerro vielä mitään informaatio- ja kommunikaatioteknologian (IKT) osuudesta muutoksessa. IKT-sovellukset ovat lisänneet niin sanottujen informaalien kenttien, joissa suuri osa oppimisestamme tapahtuu, merkitystä ja mahdollisuutta opetuksessa. Oppimisympäristöjen muuttuessa yhä tärkeämpää on, miten opettaja ja oppija kykenevät toimimaan yhteisen päämäärän saavuttamiseksi. Enää ei riitä keskittyä vain oppisisältöjen käsittelyn ja didaktisten ratkaisujen erilaisiin puoliin ja strategioihin, vaan niiden toimivuus on ymmärrettävä myös verkkopedagogisesta näkökulmasta. Eero Pantzar [39] määrittelee oppimiympäristön seuraavasti:

> *Oppimisympäristöllä tarkoitetaan kaikkia niitä paikkoja, tapahtumia ja prosesseja, joilla on välitöntä tai välillistä merkitystä yksilön oppimista edistävien ainesten tuottamisessa riippumatta siitä, liittyykö tilanteeseen yksilön tai ulkopuolisen toimijan tarkoituksellisia oppimisaikomuksia tai onko oppija samanaikaisesti tietoinen tilanteen merkityksestä oppimiselleen.*

Verkko-opiskelu on yksi tyypillinen IKT-perustainen oppimisympäristösovellus. Termillä viitataan opiskelun keskeisiin puitteisiin ja resursseihin, Internetinä näyttävään informaatioverkkoon ja sen perustalle rakennettuihin erilaisiin pedagogisiin sovelluksiin. Verkko-opiskelu on muuttanut etäopiskeluun liittyviä rakenteellisia ja pedagogisia ratkaisuja. Nykyään IKT:n rooli on hyvin keskeinen etäopetuksessa.

7.5 Pedagogisia näkökohtia

On vaarana, että IKT-sovellukset nähdään vain teknologisina innovaatioina ja niiden toimivuus arvioidaan vain teknologisin kriteerein. Voidaksemme välttää tällaista ajattelua uusien oppimisympäristöjen suunnittelussa on hyvä muistaa seuraavat asiat [39]:

1. Pelkkä informaation siirto ei ole oppimista. Informaation jalostamiseen liittyvien ratkaisujen on oltava pedagogisia.
2. Oppimisessa käsiteltävä tieto opitaan tehokkaasti sosiaalisessa vuorovaikutuksessa ja yhteistoiminnalliseti. Verkkopohjaisissa oppimisympäristöissä on monia mahdollisuuksia toteuttaa tällaista vuorovaikutusta.
3. Opetuksen on oltava yksilöllisesti joustavaa ja räätälöityä.

4. Tehokas oppiminen edellyttää nopeaa ja tiedontarpeen suhteen välitöntä tiedonhankinnan mahdollisuutta. Tämä koskee sekä yksilön että yhteistoiminnallisten ryhmien vaatimuksia.

Oppimisympäristöjen haasteina ja niille tarjoituvina mahdollisuuksina voidaan nähdä mm. seuraavat asiat [39]:

1. Tietoyhteiskunnan IKT-pohjaisia oppimisympäristöjä ei pidä nähdä perinteisten oppimisympäristöjen syrjäyttäjänä, vaan niiden täydentäjinä ja rikastuttajina.
2. Etäopiskelun mahdollisuudet paranevat huomattavasti uusien oppimisympäristöjen ansiosta.
3. Oppimisympäristöstä voidaan tehdä sellainen, joka palvelee oppijoiden eriytyneitä, esimerkiksi ikään tai aiempaan koulutukseen liittyviä, tarpeita.
4. Oppimista tukevien tietosisältöjen päivitys on entistä helpompaa ja onkin tärkeää huomioida, että tietoyhteiskunnan uusin infrastruktuuri ei saisi tarjota vanhentunutta tietoa.
5. Verkolla on monia etuja opetuksessa: se on tehokas jakelujärjestelmä, se sallii yhteistoiminnallisuuden ja antaa mahdollisuuden yksilölliselle tiedonhankinnalle.

Tässä käsiteltävä matematiikan peruskurssi järjestettiin monimuoto-opetuksena. Englanninkielisissä teksteissä käytetään nimitystä blended learning. Monimuoto-opetus voi tarkoittaa monia eri asioita. Sillä tarkoitetaan yksinkertaisimmillaan luokkahuoneessa tapahtuvan kasvokkain-opetuksen ja Internetissä tapahtuvan opetuksen tehokasta ja toimivaa yhdistelmää – ei kuitenkaan pelkästään toista toisen ohella, kuten esimerkiksi luentokalvojen jakamista verkossa [7]. Tällainen tapa on käytössä monilla yliopistokursseilla. Toisaalta monimuoto-opetusta on myös kurssi, jossa kaikki opetus tapahtuu verkossa, mutta tentti on luokkahuoneessa. Yksi esimerkki monimuoto-opetuksesta on saksalainen MaDiN (Mathematik-Didaktik im Netz)-projekti, jossa on kehitetty verkkomateriaalia yliopiston matematiikan opetukseen [30]. Projektin kehittäjät ovat mukana myös työn aiheena olevassa kansainvälisessä projektissa.

Monimuoto-opetus on myös monelle opiskelijalle parempi elämäntilanteen kannalta, esimerkiksi lähiopetuksen yhteensovittaminen työ- ja perhe-elämän kanssa voi olla hankalaa. Opiskelu on mahdollista myös toiselta paikkakunnalta tai ulkomailta käsin. Verkkotehtäviä tehdään omassa tahdissa, eli se ei ole lukujärjestykseen sidottua. Tehtävillä on kuitenkin viimeinen palautuspäivä, jolloin opiskelijoilla on kannustin tehdä tehtävät ajoissa.

7.6 Verkko-opetuksen laatunäkökohtia

Perusteluita verkko-opetuksen valitsemiselle lähiopetuksen sijaan on esittänyt mm. Kalliala [20]. Opetusmonisteet löytyvät helposti verkosta, eivätkä ne hautaudu pöydän paperipinojen alle. Oppimisprosessi ei keskity pelkkiin lähiopetuskertoihin, vaan se voi jatkua verkossa. Opittuun asiaan voidaan syventyä etätehtävissä, ja oppijat voivat kysyä toisiltaan tai opettajalta ongelmakohdista. Tietokonepohjaiset tehtävät luovat hyvät mahdollisuudet myös yksilölliseen opiskeluun; tehtävistä voidaan tehdä eri tasoisia ja asteittain vaikeutuvia, jolloin jokainen opiskelija valitsee omaa osaamistaan ja/tai tavoitteitaan vastaavat harjoitukset. Tietokonepohjainen opiskelu on myös taloudellista: pitkällä tähtäimellä siinä säästetään esimerkiksi laskuharjoitusten tarkastuskustannuksissa.

On kuitenkin huomioitava, että verkko-opetuksessa kustannuksia syntyy myös käytettävistä laitteistoista, ylläpidosta ja mahdollisista ohjelmistolisensseistä [42]. Esimerkiksi STACK on kuitenkin vapaa ohjelmisto, joten sen käytöstä ei tarvitse maksaa lisenssejä. Muita kustannuksia syntyy opiskelijoiden ja opettajien koulutustarpeesta ja siitä, että automaattisesti tarkastettavien tehtävien laatiminen on erityisiä taitoja vaativaa ja ainakin alkuun hidasta. Tulevaisuudessa, kun verkko-opetus yleistyy entisestään, opettajilla ja opiskelijoilla on enemmän valmiuksia tehtävien laatimiseen ja ratkaisujen palauttamiseen.

Verkko-opetukselle on määritelty myös erilaisia laatukriteerejä [13]. Koska verkko-opetus on useimmiten perinteistä opetusta kalliimpaa, siltä odotetaan entistä parempaa opetuksen sekä oppimistulosten tasoa ja laatua. Esimerkiksi teoksessa [10] esitettyyn yliopistollisen opetuksen laadun viisiportaiseen jaotteluun kuuluu seuraavat näkökulmat: 1) poikkeuksellisuus ja erinomaisuus, 2) tasaisuus ja virheettömyys, 3) tarkoituksenmukaisuus, 4) kustannustehokkuus ja 5) prosessin aiheuttama muutos.

Laadun poikkeuksellisuuden ja erinomaisuuden näkökulmaa on pidetty ongelmallisena yliopistojen toiminnan arvioinnissa. Poikkeuksellisuus perustuu verkko-opetusta antavan oppilaitoksen korkeatasoisuuteen, huippuyksiköihin ja elitistisyyteen. Maineikkailla ja kuuluisilla yliopistoilla on hyvä opiskelija-aines, sillä on käytettävissä parhaat resurssit ja siitä valmistuneet edustavat oman alansa huippuasiantuntijoita. Ongelma on siinä, että tällaisen yliopiston sisällölliset laatustandardit puuttuvat ja johdon tehtävä on vain ylläpitää hyvää imagoa, ei kehittää opetusta ja rakenteita. Laadun erinomaisuudella tarkoitetaan korkeita laatukriteereitä. Loppujen lopuksi vain harvoilla yliopistoilla on realistinen mahdollisuus saavuttaa kriteerit ja loput saavat huonolaatuisen leiman [13].

Tasaisuuden ja virheettömyyden näkökulman mukaan verkko-opetus on laadukasta silloin, kun siinä ei ole virheitä tai puutteita [13]. Esimerkiksi STACK-järjestelmällä tehtyjä tehtäviä voi käyttää uudelleen vuodesta toiseen, mikä auttaa virheettömyyden saavuttamisessa. Tehtävien tarkastusjärjestelmä luo opiskelijoiden vastauksista luotavan kattavan aikasarjan, mikä mahdollistaa pitkän aikavälin seurannan [42]. Laatukriteeriin liittyy myös oppimisympäristön saatavuus. Kokeilukurssilla oppimateriaalit ovat vapaasti saatavilla verkossa ja lisäksi harjoitustehtävissä käytettävä tarkastusjärjestelmä perustuu avoimeen lähdekoodiin.

Tarkoituksenmukaisuuden näkökulman mukaan verkko-opetus on laadukasta silloin, kun se vastaa asiakkaiden, eli opiskelijoiden, tarpeita ja toiveita. STACK-järjestelmän tehtävillä on etuja perinteiseen laskuharjoitusjärjestelmään verrattuna. Osa opiskelijoista ei ole halukkaita esittämään ratkaisujaan taululla tavallisissa laskuharjoituksissa. Tällöin harjoittelu kohdentuu niihin opiskelijoihin, jotka sitä vähiten tarvitsevat, eli niihin, jotka osaavat tehdä tehtävät. Verkossa palautettavat tehtävät eivät myöskään ole sidottuja mihinkään tiettyyn laskuharjoitusajankohtaan, joten tehtäviä voi olla enemmän. Palautusjärjestelmä estää erittäin pitkien ja monivaiheisten tehtävien laatimisen, mikä tekee tehtävät helpommin lähestyttäviksi heikoimmillekin opiskelijoille. Parempien opiskelijoiden ei taas tarvitse kuluttaa aikaansa hitaampien edistymisen seuraamiseen [42].

Automaation vaikutus kustannustehokkuuteen on selvä. Toisaalta kustannuksia syntyy käytettävistä laitteista, opiskelijoiden ja opettajien koulutustarpeesta ja opettajilta vaadittavien taitojen puutteesta. Avoimen lähdekoodin ratkaisuihin perustuva STACK ei aiheuta ohjelmistolisenssikustannuksia.

Samojen tehtävien käyttö useana vuotena on mahdollista, sillä aikaisempien kurssien malliratkaisujen kopioiminen ei tehtävien satunnaistamisen takia onnistu [42].

Prosessin muutoksen laadukkuudella tarkoitetaan organisaation itseohjautuvuutta ja itsearviontia painottavaa ajattelutapaa. Verkkotehtävät tukevat muutosprosessia antamalla ajantasaista tietoa opiskelijoiden suoriutumisesta heille itselleen ja luennoitsijalle. Opiskelija ja opettaja osaavat suunnata lisäharjoittelun niihin seikkoihin, joissa se on tarpeen [42].

8 Matematiikan verkko-opetuksen tutkimus Suomessa

Verkko-opetusta on tutkittu melko paljon viime vuosina, mutta juuri matematiikan verkko-opetukseen liittyviä tutkimuksia on suhteellisen vähän. Yliopistollista matematiikan verkko-opetusta ovat tutkineet mm. Nieminen [36] ja Kivelä [23].

Maanpuolustuskorkeakoulun matematiikan ja fysiikan opettaja Mika Nieminen tutki väitöskirjassaan [36] Ilmavoimien kadettikoululaisten kokemuksia verkkopohjaisten oppimisympäristöjen käytöstä matematiikan perusopetuksessa. Hänen tutkimuskohteenaan oli kolme kadettikurssia vuosina 2003-2007. Kurssien sisältöön kuului lähinnä lukualueita, funktioita, derivointia ja todennäköisyyslaskentaa. Kursseilla käytettiin koulun omassa koulutusportaalissa olevaa aineistoa, joka koostui luennoilla käytetystä opettajan tekemästä kirjallisesta materiaalista, videoleikkeistä sekä monipuolisista web-linkeistä, joissa oli graafista harjoitusmateriaalia.

Maanpuolustuskorkeakoulun verkkokurssia kehitettiin tutkimuksen aikana sykleittäin ja saatuja kurssituloksia analysoitiin. Tulokseksi saatiin, että verkko-opetuksella toteutetun ja lähiopetuksella toteutetun kurssin tuloksilla ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa. Koska matematiikan lähiopetuksen järjestäminen kadeteille on kallista ja hankalaa muun muassa pienten opetusryhmien takia, verkko-opetuksen järjestäminen todettiin kannattavaksi ja verkko-opetuksen kehittämistyötä haluttiin jatkaa.

Simo Kivelä toteutti osana MatTa-projektia Teknillisessä korkeakoulussa keväällä 2001 DelTa-ohjelman käyttöön pohjautuvan matematiikan kokeilukurssin, joka oli osa laajan oppimäärän L2-kurssia Mat-1.1020 [23]. Siinä etsittiin tapoja käyttää pakettia osana tavanomaista peruskurssia, testattiin sen teknistä toimintaa ja kartoitettiin opiskelijoiden näkemyksiä. Kokeilukurssin rakenne oli erilainen kuin mihin opiskelijat olivat tottuneet; siinä vaadittiin paljon enemmän itsenäistä työskentelyä ja luennoilla oli tarkoitus lähinnä johdatella, keskustella ja tehdä yhteenvetoa viikon aihepiiristä. Opiskelijoiden oli tarkoitus opiskella itse yksityiskohdat DelTa-pakettia käyttäen. Luentojen lisäksi järjestettiin perinteisiä laskuharjoituksia ja tietokoneharjoituksia. Opiskelijat saivat halutessaan laskea lisäksi itsenäisesti kirjasta tehtäviä niin sanottuun työkirjaan ja tästäkin sai lisäpisteitä kokeeseen.

Tutkimustuloksissa oli piirteitä, jotka eivät niinkään koske kokeilukurssia vaan yleensä opiskelua Teknillisessä korkeakoulussa. Kurssille oli ilmoittautunut yhteensä 209 opiskelijaa, mutta valitettavan harva heistä osallistui aktiivisesti kurssin eri toimintamuotoihin, eli luentoihin, tietokoneharjoituksiin, kotilaskujen laskemiseen ja työkirjan tekemiseen. Tutkimuksessa tutkittiin opiskelijoiden jakautumista eri opiskelutyyleihin. Monet ovat saaneet tietokoneharjoituksista pisteitä, vaikka luennoille osallistuminen tai laskuharjoitusten tekeminen on jäänyt vähemmälle. Työkirjan tekeminen on jäänyt monella tietokoneharjoitusten tekijällä vähemmälle. Kaikissa jakaumissa esiintyy sellaisiakin opiskelijoita, jotka opiskelevat monella tavalla samanaikaisesti. Toisaalta jakaumissa on myös paljon sellaisia opiskelijoita, jotka eivät työskennelleet oikeastaan millään tavalla.

Kurssin alku- ja loppukyselyissä selvitettiin myös opiskelijoiden valmiutta tietokoneen käyttöön opiskelussa. Tulosten mukaan uskoa tietokoneavusteisuuteen ei puutu, mutta toisaalta halutaan pitää kiinni myös perinteisistä opetusmenetelmistä. Osa opiskelijoista piti hypertekstin lukemista vaikeana ja DelTa-paketin rakenteen hahmottaminen ja siinä navigointi oli hankalaa. Toisaalta vastaajien mielestä oli hyvä, että kurssilla käsiteltiin samaan aikaan matematiikan tietosisältöön ja tietotekniikkaan liittyviä asioita. Luennot ja laskuharjoitukset koettiin kuitenkin selvästi tärkeämmiksi kuin tietokoneharjoitukset. Tutkimuksen johtopäätöksenä oli, että tietotekniikkaa käyttäessä sen rooli ei pidä olla ainoastaan kirjan tai opettajan korvike. Itsenäistä työskentelyä voitaisiin kokeilla tietenkin ilman tietokonettakin. Selvästikin DelTa-paketti vaati vielä kehittelyä rakenteellisesti ja teknisesti. Tämän kurssin jälkeen TKK onkin kehittänyt paljon tietotekniikkapohjaista opetustaan ja monet tämän paketin ongelmista on jo ratkaistu.

Myös Joensuun yliopiston matematiikan laitoksella on 2000-luvulla kehitetty teknologian hyödyntämistä opetuksessa ja tutkimuksessa. Heovat suunnitelleet, tuottaneet ja kokeilleet lähi-, etä- ja itseopiskeluun soveltuvaa oppimateriaalia. Eräällä kurssilla on käytetty vuorovaikutteisiin matemaattisiin animaatiohin perustuvia www-työarkkeja. Tässä ei oleteta, että matematiikan yliopisto-opiskelu sujuisi kaikilta täysin itsenäisesti, vaan lähiopetustakin tarvitaan. Yliopiston lineaarialgebran kurssilla käytettiin neljää työarkkia. Ensimmäinen työarkki tehtiin opettajan johdolla tietokoneluokassa ja loput omatoimisesti [28].

Demojen yhteydessä pidettiin kysely opiskelijoiden suhtautumisesta tietokoneavusteiseen matematiikan opiskeluun. Opiskelijat olivat myönteisiä tietokoneavusteisen matematiikan opetuksen suhteen. Yli 90 prosenttia vastaajista uskoi tietokoneen soveltuvan matematiikan, erityisesti lineaarialgebran, opiskelun ja opetuksen tueksi. Suurin osa (n. 80 prosenttia) koki tietokoneella työskentelyn mielekkääksi ja motivaatiota parantavaksi matematiikan opiskelussa. Hieman pienempi osa (63,2 prosenttia) koki tietokoneella työskentelyn yleensä hyödylliseksi oppimistulosten kannalta. Tämä oli mielenkiintoinen tulos sikäli, että muutamat vastanneet pitivät siis tietokonetta sopivana, mutta eivät uskoneet sen parantavan oppimistuloksia. Demojen jälkeen tehtiin vielä sama kysely uudestaan. Tällöin 14 prosenttiyksikköä enemmän opiskelijoista piti tietokoneella työskentelyä hyödyllisenä oppimistulosten kannalta [28].

9 Kokeilun tulokset

Kurssi Mat-1.1610 Mathematics 1 toteutettiin suunnitelmien mukaisesti syksyllä 2008 ensimmäisen ja toisen opetusperiodin aikana. Koska kurssilla oli yhteensä kolme opiskelijaa, ei tästä kurssista voida tehdä mitään tilastollisia päätelmiä. Yksi opiskelija jätti kurssin kesken mahdollisesti heikohkosta osaamisestaan johtuen. Laskuharjoituksissa kävi aktiivisesti ainoastaan yksi kurssilainen, ja palautettavia laskuharjoituksia teki alkuvaiheessa kolme ja loppupuolella kaksi opiskelijaa. Kurssilaiset eivät olleet ensimmäisen vuoden opiskelijoita, joten he eivät olleet tehneet perustaitotestiä syksyllä.

Kurssiassistenttina toiminut tämän työn kirjoittaja teki kurssille myös automaattisesti tarkastettavia verkkotehtäviä. Kaikki kurssin osallistujat tekivät niitä ainakin jonkun verran. Tehtävät olivat saman tyyppisiä kuin muissa laskuharjoituksissa, erona kuitenkin se, että tehtävät olivat satunnaistettuja. Koska tehtävät olivat käytössä ensimmäistä kertaa, niissä oli jonkin verran virheitä, joista aktiiviset opiskelijat raportoivat. Tehtävät ovatkin luotettavampia tulevaisuudessa vastaavilla kursseilla, sillä suurin osa niissä esiintyvistä virheistä on korjattu.

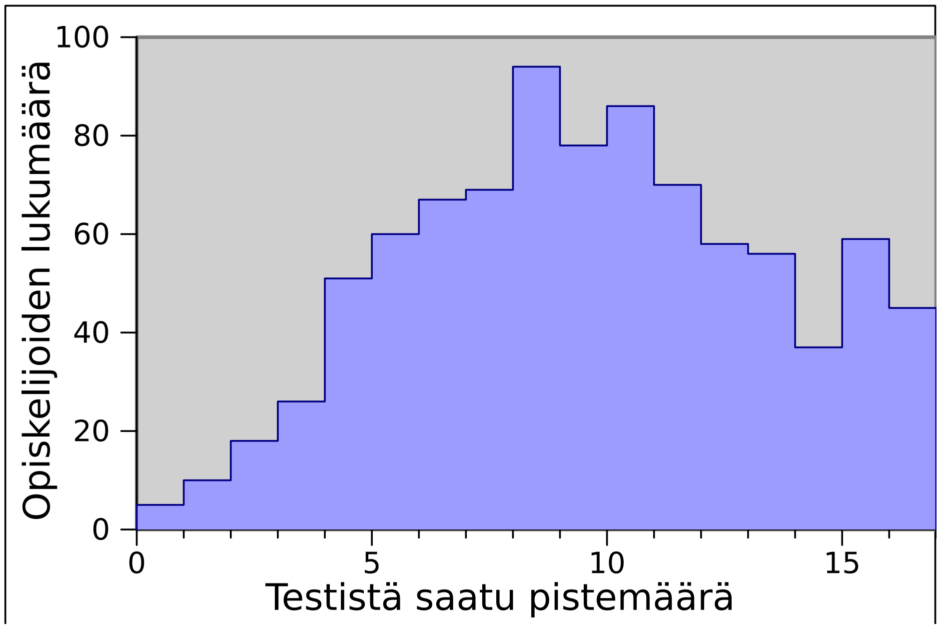
Kurssin kansainvälisyystavoite onnistui kurssikielen osalta hyvin. Kaikki opetus ja tehtävät olivat englanniksi. Sen sijaan Baijerin virtuaaliyliopisto VHB ei päässyt aloittamaan kurssia syksyn aikana, vaan sen ajankohta siirtyi lähitulevaisuuteen. TKK:n kurssin opiskelijat olivat kaikki ulkomaalaisia, joten heille kurssin englanninkielisyys oli varmasti hyvä asia.

10 Perustaitotesti ja laskutupa

10.1 Perustaitotesti

Syksyllä 2008 Teknillisessä korkeakoulussa opintonsa aloittaville teetettiin heti opintojen alussa pakollisen Lapio-kurssin yhteydessä tietokoneella tehtävä matematiikan perustaitotesti. Tarkoituksena oli selvittää opiskelijoiden lähtötaso, jotta luennoitsijat voisivat ottaa opiskelijoiden aikaisemmat tiedot paremmin huomioon opetuksessaan. Tulevaisuudessa perustaitotestissä heikosti menestyneet opiskelijat ohjataan kertaavaan harjoitteluun, joka tapahtuu STACK:lla tehtävien lukion asioita kertaavien harjoitusten avulla. Perustaitotestin idea on saatu Tampereen teknilliseltä yliopistolta, jossa vastaava testi ja kertaustehtävät ovat olleet käytössä aikaisemmin [40]. Perustaitotestissäkin tehtävät ovat satunnaistettuja, millä pyritään vähentämään huijaamisen mahdollisuutta. Perustaitotestin tehtävät teki STACK-muotoon tämän työn kirjoittaja.

Perustaitotestin kysymykset kattoivat lähes koko lukion pitkän matematiikan pakollisten kurssien sisällön. Aihealueina olivat luvut, lausekkeet, yhtälö,

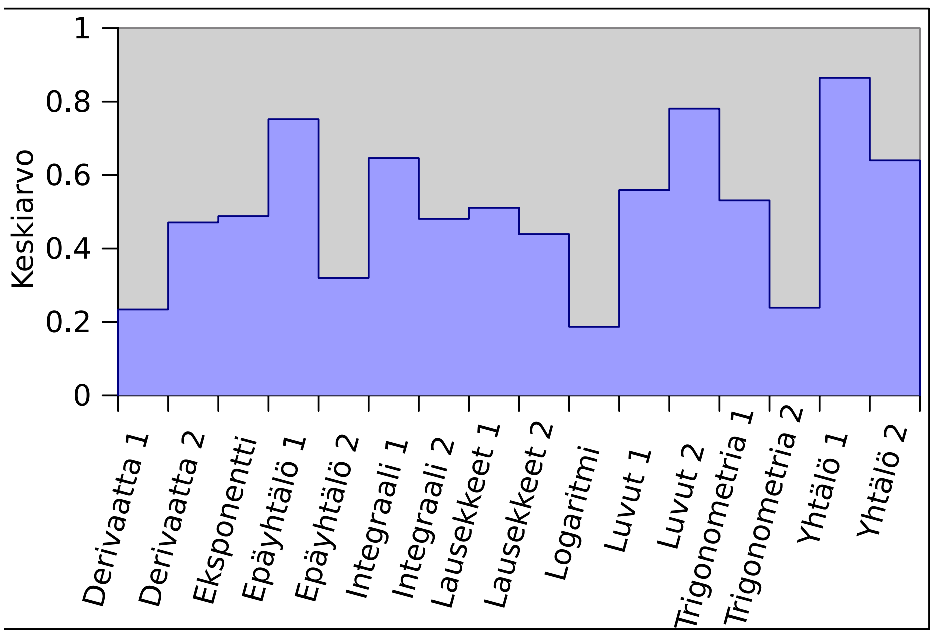


Kuva 5: Perustaitotestin pistemäärien jakauma (N=889)

epäyhtälö, trigonometria, logaritmi- ja eksponenttifunktiot, derivaatta sekä integraali. Jokaisesta aihealueesta oli kaksi kysymystä, joten kysymyksiä oli yhteensä 16.

Testin tulokset olivat melko paljon samankaltaisia TTY:n tulosten kanssa. Opiskelijoiden keskiarvo oli 9.26/16 pistettä. Tuloksissa oli jonkin verran vaihtelua eri koulutusohjelmien välillä. Tulosten jakauma ei muistuta normaalijakaumaa, vaan kyseessä on niin sanottu kaksipiikkinen jakauma. Lähes täysiä pisteitä on siis suhteessa paljon. Tämä johtuu siitä, että TKK:lla on joitakin tutkinto-ohjelmia (esimerkiksi teknillinen fysiikka ja matematiikka), joihin on vaikea päästä ja jotka vaativat hyvää matematiikan osaamista. Vuonna 2008 sisäänpäässeet menestyivät testissä paremmin kuin vuonna 2007 sisäänpäässeet, eli ne opiskelijat, jotka olivat pitäneet välivuoden. Vuoden aikana voi unohtaa esimerkiksi peruslaskukaavat.

Perustaitotestin eri osa-alueiden välillä oli myös eroja osaamisessa. Parhai-



Kuva 6: Perustaitotestin tehtäväkohtaiset pisteet

ten opiskelijat osasivat perus yhtälön- ja epäyhtälönratkaisun. Myös perus integraalitehtävä sujui hyvin. Huonoiten sujui logaritmitehtävä, joka oli seuraavaa tyyppiä:
Ratkaise logaritmiyhtälö

$$\ln(3 - x) = 1 + \ln(5 + x).$$

Ilmeisesti tämäntyyppinen tehtävä ei ole kovin rutiininomainen lukiolaisille ja lisäksi siinä piti muistaa logaritmin laskusääntöjä, esimerkiksi sääntö $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$. Aihetta käsitellään lukiokirjoissa vaihtelevasti. Esimerkiksi Pitkä matematiikka-sarjan kirjassa Juuri ja logaritmifunktiot (kurssi MAA8) [21] on kokonainen kappale logaritmikaavojen käsittelyä, kun taas Pyramidi-sarjan vastaavassa kirjassa säännöt ovat Logaritmifunktio-kappaleen yhteydessä [24]. Perustaitotestin tulosten perusteella aihetta tulisi käsitellä syvällisemmin lukion oppikirjoissa, vähintään omana kappaleenaan.

Vaikeuksia aiheuttivat myös derivaattatehtävät. Ensimmäinen tehtävä liittyi trigonometristen funktioiden derivointiin. Vastaukseksi tuli pitkä lauseke, joten opiskelijoilla saattoi tulla näppäilyvirheitä. Näitä virheitä pitäisi kuitenkin vähentää sen, että samaa tehtävää sai yrittää kolme kerta ilman pistemenetyksiä. Trigonometristen funktioiden derivointikaavat saattoivat myös olla opiskelijoilta unohduksissa. Uudessa lukion opetussuunnitelmassa trigonometrisiä funktioita käsitellään vasta Derivaatta-kurssin jälkeen kurssissa 9. Näin ollen niiden derivointi käsitellään eri kurssissa kuin suurin osa muista derivointisäännöistä [37]. Olisiko siis parempi palata vanhan opetussuunnitelman mukaiseen järjestykseen, jossa kaikki derivointisäännöt käsitellään samassa kurssissa?

Myös trigonometriset yhtälöt tuottivat testissä hankaluuksia. Yhtälöt olivat tyyppiä $\sin(\mathtt{a} \cdot \mathtt{x}) - \sin(\mathtt{b} \cdot \pi) = \mathtt{0}$ ja $\cos(\mathtt{a} \cdot \mathtt{x}) + \cos(\mathtt{b} \cdot \mathtt{x}) = \mathtt{0}$. Heikko osaaminen voi johtua siitä, että tehtävät eivät olleet ihan perinteisiä trigonometrisia yhtälöitä, vaan niiden ratkaiseminen vaati hieman syvempää osaamista. Toisaalta tällaiset tehtävät testaavat opiskelijoiden soveltuvuutta syvempää osaamista vaativille teknisille aloille.

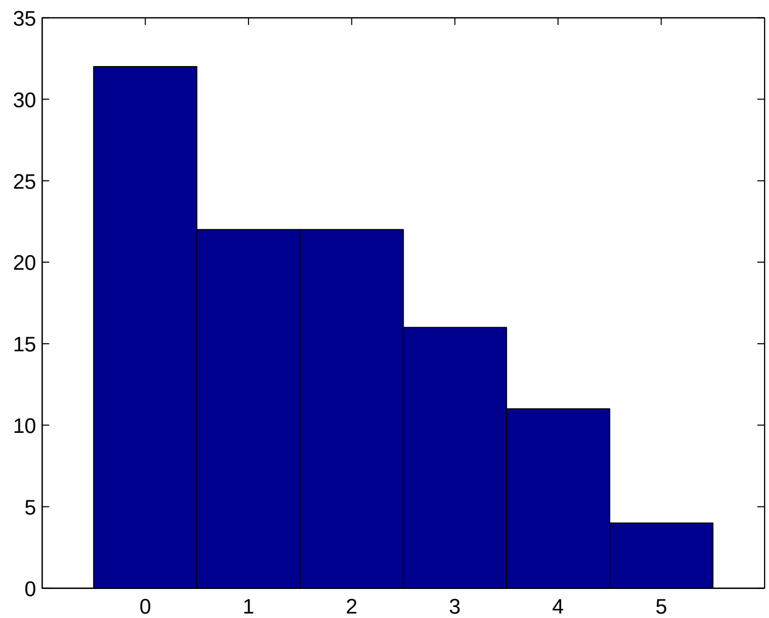
10.2 Perustaitotestin tulosten vertaaminen opintomenestykseen

Perustaitotestistä saatuja pistemääriä (Kuva 5) verrattin opiskelijoiden syksyllä 2008 matematiikan ensimmäisestä peruskurssista saatuun arvosanaan. Eri koulutusohjelmilla on erilaisia matematiikan peruskursseja, joiden sisältö ja vaatimustaso vaihtelee. Tutkimuksessa on mukana vain ne opiskelijat, jotka osallistuivat jonkun peruskurssin välikokeisiin tai suorittivat kurssin tentillä. Tällaisia opiskelijoita oli yhteensä 860. Perustaitotestin suoritti yhteensä 889 ensimmäisen vuoden opiskelijaa.

Muuttujien välistä korrelaatiota tutkittiin Spearmanin korrelaatiokertoimen (ρ) avulla, koska sen käyttö ei vaadi muuttujien normaalijakautuneisuutta [14]. Korrelaatio perustaitotestistä saatujen pisteiden ja peruskurssin arvosanan välillä ei ole korkea, mutta kylläkin tilastollisesti merkitsevä ($\rho = 0,3273; p = 0,0000$). Tämä voi johtua useasta syystä. Teknillisen fysiikan ja matematiikan koulutusohjelmaan kuuluvat huomattavasti muita haastavammat matematiikan peruskurssit. Myös muiden koulutusohjelmien opiskelijoista osa suorittaa perusaineiden laajan oppimäärän. Näillä laajan matematiikan kursseilla hyvän arvosanan saaminen kokeesta on hankalampaa kuin suppeammassa oppimäärässä. Toisaalta ainakin Teknillisen fysiikan ja matematiikan koulutusohjelman opiskelijat ovat saaneet keskimääräistä parempia pistemääriä perustaitotestistä.

Jos tutkittavaksi ottaa heikoiten perustaitotestissä (4 pistettä tai alle) menestyneiden ryhmän, on nähtävissä, että tällä ryhmällä menestys peruskursseissa ei ole ollut kovin hyvä (Kuva 7). Yleisin arvosana oli 0 ja arvosanojen keskiarvo 1,66. Voisi siis olla hyödyllistä tulevaisuudessa ohjata opiskelijat, jotka saivat alle neljä pistettä testistä, kertaavaan harjoitteluun.

Tampereen teknillisessä yliopistossa matematiikan perustaitoja kehittävään jumppaan ohjattiin kaikki opiskelijat, jotka saivat alle viisi pistettä vastaavasta testistä. Jumppa sisälsi 81 tietokoneavusteista lukion matematiikan pitkään oppimäärään kuuluvaa tehtävää. Kertausjakso oli pakko läpäistä tekemällä tehtäviä tai tentillä, mikäli opiskelija halusi suorittaa Insinöörimatematiikka 1 -kurssin välikokeilla. Jumppatehtäviä tekemisestä näytti olevan suurta hyötyä matematiikan kurssin läpäisemisen kannalta [40]. Todennäköisesti siis myös Teknillisessä korkeakoulussa kannattaisi hyödyntää näitä jumppatehtäviä heikoimpien opiskelijoiden oppimisen tukemiseksi.



Kuva 7: Matematiikan peruskurssi 1:stä saatujen arvosanojen lukumäärä henkilöillä, jotka saivat alle neljä pistettä perustaitotestistä (N=107).

10.3 Laskutupa

Syksyllä 2008 Teknillisessä korkeakoulussa otettiin käyttöön laskutupa aiempaa laajempana. Laskutuvan ajatus on antaa matematiikan ja fysiikan peruskurssien opiskelijoille yksilöllistä ohjausta harjoitustehtävien tekemiseen [27]. Uusien tilojen löytäminen tupatoiminnalle mahdollisti entistä laajemmat aukioloajat. Loppusyksystä 2008 laskutupa olikin auki arkipäivisin klo 19.30 asti. Tehtäviä voi tehdä yksin, parin kanssa tai pienissä ryhmissä. Suosituimpina aikoina laskutuvan ohjaajina toimivat luennoitsijat ja matematiikan ja fysiikan jatko-opiskelijat. Tarkoituksena ei ole antaa valmiita vastauksia opiskelijoille, vaan ohjaaja auttaa opiskelijoita ymmärtämään paremmin tehtävien idean.

Laskutuvasta on tullut erittäin suosittu opiskelijoiden keskuudessa [15]. Opiskelijat eivät varmastikaan enää luovuta tehtävien suhteen niin helposti kuin aikaisemmin. Pareittain tai ryhmässä tehtävien tekeminen parantaa sosiaalisia valmiuksia ja opettaa opiskelijaa selittämään asiat niin, että kaveritkin ymmärtävät. Tällainen opetusmuoto sopii erittäin hyvin Tampereen teknilllisen yliopiston tutkimuksissa kuvailluille vertaisoppijoille ja tukea tarvitseville oppijoille [40]. Vertaisoppijoilla yhteisöllisyys on tärkeää, kun taas tukea tarvitsevien käsitys omasta oppimisestaan ja asenne matematiikan opiskelua kohtaan on heikko. Tukea tarvitsevia voidaan laskutuvassa kannustaa yrittämään enemmän ja täten kohottaa heidän ”matematiikkaitsetuntoaan”.

11 Lopuksi

Korkeakouluopetusta on kehitetty Suomessa viime vuosina monilta eri suunnilta. Teknillinen korkeakoulu yhdistyy vuonna 2010 Helsingin kauppakorkeakoulun ja Taideteollisen korkeakoulun kanssa Aalto-yliopistoksi. Korkeakouluilta halutaan entistä enemmän kansainvälistä menestystä. Yksi menestyksen avain on toimiva yhteistyö eri maiden huippuyliopistojen välillä perusopetuksen kehittämisessä. Verkko-opetuksessa yhteistyö on helppoa, sillä materiaalit ovat helposti jaettavissa verkon välityksellä, ja materiaalien englanninkielisyys tekee niistä erittäin monikäyttöiset.

Tutkittavalla kurssilla aloitettua kansainvälistä yhteistyötä aiotaan jatkaa myös tulevaisuudessa. Saksalainen Baijerin virtuaaliyliopisto (VHB) aikoo järjestää keväällä 2009 matematiikan verkkokurssin, jossa käytetään projektissa tuotettua materiaalia. Euroopan Unionilta on myös haettu rahaa projektille, jonka tarkoituksena on kehittää matematiikan verkko-opetusta kansainvälisesti. Projektin koordinaattorina toimii paljon matematiikan verkkoopetusta tutkinut Evelyn Stepancik.

Verkko-opetuksessa on omat haasteensa. Monissa oppimiskäsityksissä korostetaan nykyään sosiaalista kanssakäymistä. Verkon välityksellä tapahtuvassa oppimisessa toisten opiskelijoiden kohtaaminen on hankalampaa. Toisaalta on kehitetty erilaisia oppimisympäristöjä, joissa opiskelijat voivat keskustella keskenään ja jakaa mielipiteitään. Tässä työssä esillä ollut virtuaalinen matematiikan peruskurssi järjestettiin monimuoto-opetuksena, jolloin opiskelijoilla oli mahdollisuus myös opettajan ja muiden opiskelijoiden kohtaamiseen kasvokkain esimerkiksi laskuharjoituksissa ja luennoilla.

Verkko-opetus kehittyy koko ajan, ja tulevaisuudessa sitä todennäköisesti tullaan käyttämään yhä enemmän opetuksen tukena kaikilla kouluasteilla. Yliopiston matematiikan verkko-opetuksessa haasteita tuottaa erityisesti vaikeampien todistustehtävien luominen tietokoneella, mutta siihenkin on kehittänyt ratkaisuja mm. Jarno Ruokokoski diplomityössään [46]. Toisaalta näitä verkkotehtäviä voidaan käyttää perusasioiden kertaukseen ja syventämiseen sekä laskurutiinien kehittämiseen.

Viime vuosina opiskelijoiden työnteko ja muut kiireet ovat lisääntyneet. Kaikille opiskelijoille ei sovi aikatauluihin käydä joka arkipäivä luennoilla ja laskuharjoituksissa. Verkko-opetuksen avulla tapahtuva opiskelu on joustavampaa, sillä opiskelija ei ole sidottu tiettyihin aikatauluihin, ja hän voi tehdä esimerkiksi automaattisesti tarkastettavia harjoitustehtäviä mihin vuorokaudenaikaan tahansa. Toisaalta Teknillisen korkeakoulun matematiikan verkkokurssilla on tietyt aikarajoitukset, joita pitää noudattaa. Esimerkiksi laskuharjoitustehtävien palautuksella on aikarajoitus. Tämä tuo tarvittavaa kurinalaisuutta opiskeluun.

Matematiikan perusopetuksen kehittämiseen kuuluu myös opiskelijoiden lähtötason selvittäminen. Vaikka Teknilliseen korkeakouluun hakeekin perinteisesti matemaattis-luonnontieteellisissä aineissa lahjakkaita henkilöitä, heidän osaamisessaan on kuitenkin joitakin puutteita. Peruslaskusääntöjenkin muistaminen on joillekin opiskelijoille hankalaa. Tämä saattaa johtua esimerkiksi liian pintapuolisesta opiskelusta lukiossa, tai motivaation puutteesta. Matematiikka on oppiaineena pitkään jakanut mielipiteitä: siitä joko pidetään kovasti tai sitten sitä inhotaan. Matematiikan houkuttelevuutta pitäisi siis lisätä jo yläasteen ja lukion opetuksessa.

Teknillisessä korkeakoulussa käytössä ollut matematiikan perustaitotesti on hyvä mittari matematiikan perusasioiden hallinnan mittaamiseen. Se kattaa lukion pitkän matematiikan oppimäärän keskeisimmät alueet. Koska tehtävät ovat satunnaistettuja, testissä huijaaminen ja toisilta opiskelijoilta katsominen on hankalampaa. Tulokset ovat sähköisessä muodossa, joten niiden analysoiminen on helppoa. Luennoitsijat voivat saatujen tulosten perusteella kehittää omaa opetustaan, ja kerrata tarvittaessa hankalimpia lukioasioita. Testiä tullaan käyttämään myös tulevina vuosina opiskelijoiden lähtötason mittaamiseen Teknillisessä korkeakoulussa. Testin käyttöä voidaan haluttaessa laajentaa myös muihin korkeakouluihin.

Näistä kokeiluista opittiin paljon. Koska virtuaalinen matematiikan peruskurssi oli osallistujamäärältään pieni, sillä oli helppo testata uusia verkkotehtäviä ja opetusmetodeja. Opiskelijoilta saatu palaute verkkotehtävistä oli arvokasta, sillä sen avulla mahdolliset virheet esimerkiksi tehtävissä oli helppo korjata. Kertaalleen testattuja tehtäviä on tulevaisuudessa hyvä käyttää muilla kursseilla. Perustaitotestin tehtävät oli jo useampaan kertaan testattu Tampereen teknillisessä yliopistossa, joten niissä ei ollut virheitä. Tulevaisuudessa on tarkoitus mainostaa enemmän virtuaalisia matematiikan kursseja etenkin ulkomaalaisille opiskelijoille, jolloin osaanottokin varmasti on suurempi.

Jos tulevaisuudessa virtuaalisten matematiikan peruskurssien koot ovat suurempia, niistä voisi tehdä tilastollista tutkimusta. Virtuaalisen kurssin suorittaneiden opiskelijoiden arvosanoja voisi verrata tavallisena lähiopetuksena pidettyjen kurssien opiskelijoiden arvosanoihin. Vertailuun voisi ottaa mukaan myös molempien ryhmien perustaitotestistä saamat arvosanat, jolloin opiskelijoiden lähtötasojen samanlaisuus tai erilaisuus tulisi otettua huomioon. Muita jatkotutkimusaiheita voisi olla myös matematiikan perusopetuksen yleinen taso. Miksi jotkut opiskelijat eivät pärjää matematiikan peruskursseilla, ja näin ollen heidän opiskelu-uransa Teknillisessä korkeakoulussa hidastuu jo heti ensimmäisenä opiskeluvuotena?

Viitteet

[1] Airila, M. Esitelmä ”Aalto-yliopistoa rakentamassa” valtakunnallisilla LUMA-tiedepäivillä Teknillisessä korkeakoulussa 24.10.2008.

[2] Bennet, S. – Lockyer, L. 2004. Becoming an Online Teacher: Adopting to a Changed Environment for Teaching and Learning in Higher Education. *Education Media iInternational* sep 2004.

[3] Caprotti, O. 2006. WebALT! Deliver Mathematics Everywhere. – *SITE* 2006.

[4] Cavanaugh, K. – Gilla, C. – Bosnick, J. – Hess, M – Scott, H. 2008. Effectiveness of Interactive Online Algebra Learning Tools. *J. Educational Computing Research*; 38(1): 67-95.

[5] Deriven kotisivu (viitattu 1.4.2009):

`http://www.chartwellyorke.com/derive.html`.

[6] Discendum Oy (viitattu 1.4.2009): `http://www.discendum.com/`.

[7] Garrison, D. – Kanuka, H. 2003. Blended learning: Uncovering its Transformative Potential in Higher Education. Verkkojulkaisu (viitattu 6.6.2008): `http://dx.doi.org/10.1016/j.iheduc.2004.02.001`.

[8] GeoGebra (viitattu 1.4.2009): `http://www.geogebra.org`.

[9] GeoGebrawiki (viitattu 20.10.2008):
`http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Main_Page`.

[10] Harvey, L. – Knight, P. 1996. Transforming higher education. *The Society of Research into Higher Education.*

[11] Harjula, M. 2008 Mathematics Exercise System with Automatic Assessment. Diplomityö. Teknillinen korkeakoulu.

[12] Heck, A. – van Gastel, L. 2006. Diagnostic Testing with Maple T.A. Paper presented at the WebALT 2006 First WebALT Conference and Exhibition January 5-6 2006 Techincal University of Eindhoven, Netherlands.

[13] Heikkilä, M. – Nevgi, A. – Haarala-Muhonen, A. 2005. Verkko-opetuksen laatutyö – *Laadukkaasti verkossa Yliopistollisen verkko-opetuksen ulottuvuudet* (toim. Nevgi, A., Lofström, E., Evälä, A.) Kasvatustieteen laitoksen julkaisuja. Helsingin yliopisto

[14] Heikkilä, T. 2005. Tilastollinen tutkimus. Edita.

[15] Helsingin sanomat, 2.12.2008. Tekniikan opinnot viivästymässä valtaosalla.

[16] Hohenwarter, M. 2006. Dynamische und interaktive Materialien für den Mathematikunterricht. Salzburg. Verkkojulkaisu (viitattu 24.2.2009): `http://www.geogebra.org/publications/2006_nuernberg.pdf`.

[17] Joliffe, A. – Ritter, J. – Stevens, D. 2001. The Online Learning Handbook. Developing and using web-based learning. *The Times Higher Education Supplement*.

[18] Jonassen, D. – Howland, J. – Moore, J. – Marra, R. 2003. Learning to Solve Problems with Techonology A Constructivist Perspective. Merrill Prentice Hall.

[19] Joustavan opiskelun JOOPAS-portaali (viitattu 1.4.2009): `http://www.joopas.fi`.

[20] Kalliala, E. 2002. Verkko-opettamisen käsikirja. Oy Finnlectura Ab.

[21] Kangasaho J. – Mäkinen J. – Oikkonen J. – Paasonen J. – Salmela M. – Tahvanainen J. 2006. Pitkä matematiikka 8 Juuri- ja logaritmifunktiot. WSOY

[22] Kilpiö, A. 2002. Opettajuus ja verkko-opetus. Pro Gradu-tutkielma. Teknillinen Korkeakoulu. Verkkojulkaisu (viitattu 24.2.2009): `http://www.simlab.tkk.fi/publications/kilpioanna.pdf`.

[23] Kivelä, S. 2001. Verkko-opiskelumateriaalia hyödyntävä matematiikan peruskurssi Teknillisessä korkeakoulussa: järjestelyt ja kokemuksia. - *Tutkimuksella parempaan opetukseen. Matematiikan ja luonnontieteiden tutkimusseura ry:n päivät Tampereella 28.-29.2001* (toim. Silfverberg, H., Joutsenlahti, J.).

[24] Kontkanen P. – Liira, R. – Luosto, K. – Nurmi, J. – Nurmiainen, R. – Ronkainen, A. – Savolainen S. 2006. Pyramidi 8 Lukion pitkä matematiikka Juuri- ja logaritmifunktiot. Tammi.

[25] Lakkala, M. – Lipponen, L. 2004. Oppimisen infrastruktuurit verkko-oppimisen tukena. *Verkko-opetus ja yliopistopedagogiikka* (toim. Korhonen, V.) Tampere University Press.

[26] Lammenranta, M. 1993. Tietoteoria. Gaudeamus.

[27] TKK perusopetuksen laskutupa (viitattu 9.4.2009): `http://math.tkk.fi/opetus/laskutupa/`.

[28] Lehtola, H. – Pesonen, M. – Puumalainen, J. 2002. Virtuaalimatematiikkaa - kokemuksia geometristen animaatioiden käytöstä matematiikan oppimateriaalissa. *Yliopisto-opetusta virtuaalistamassa.* (toim. Haapala, A., Kallonen-Rönkkö, M., Koppinen, K., Kähkönen, E., Thure, V.) Opetusteknologiakeskuksen selosteita. Joensuun yliopisto.

[29] Leino, J. 1998. Konstrukstivismi matematiikan opetuksessa. *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* (toim. Räsänen, P. Kupari, P., Ahonen, T., Malinen, P.) Niilo Mäki Instituutti, Koulutuksen tutkimuslaitos.

[30] Madin (Mathematik-Didaktik im Netz) -projekti. (viitattu 24.2.2009): `http://www.madin.net`.

[31] Maple T.A. (viitattu 14.4.2009):
http://www.maplesoft.com/products/mapleta/

[32] Martio, O. 2001. Osataanko matematiikkaa sittenkään? *Solmu* 3/2001.

[33] MatTaFi-projekti. (viitattu 15.11.2008):
`http://matta.hut.fi/mattafi/index.shtml`.

[34] Medienvielfalt im Mathematikunterricht (viitattu 24.2.2009):
`http://www.austromath.at/medienvielfalt/`.

[35] Negvi, A. – Kynäslahti, H. – Vahtivuori S. – Uusitalo A. – Ryti, K. 2003. Yliopisto-opettaja verkossa - taidot puntarissa. Verkko-opettajien osaamisalueiden ja tarjolla olevien tukipalveluiden kartoitus. *Suomen virtuaaliyliopiston e-julkaisuja 5.* Helsingin yliopisto, Kasvatustieteen laitos.

[36] Nieminen, M. 2007. Ilmavoimien kadetit verkossa- kokemuksia verkkopohjaisen oppimisympäristön käytöstä matematiikan perusopetuksessa. Väitöskirja. Jyväskylän yliopisto, Matemaattisluonnontieteellinen tiedekunta, Fysiikan laitos.

[37] Nuorten lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet 2003. Opetushallitus. Verkkojulkaisu (viitattu 24.2.2009): `http://www.edu.fi/julkaisut/maaraykset/ops/lops_uusi.pdf`

[38] Näätänen, M. 2001. Mitä TIMSS-tutkimus kertookaan suomalaisten koululaisten matematiikan taidoista ja matematiikan opetuksesta?. *Solmu* 1/2001

[39] Pantzar, E. 2004. Oppimisympäristö verkkona- verkko oppimisympäristönä. *Verkko-opetus ja yliopistopedagogiikka.* (toim. Korhonen, V.) Tampere University Press.

[40] Pohjolainen, S. – Raassinna, H. – Silius, K. – Huikkola, M. – Turunen, E. 2006. TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittäminen. Tampere: Tampereen teknillinen yliopisto Matematiikan laitos. Tutkimusraportti 84.

[41] Ranta, A. 2004. Grammatical Framework. *Journal of Functional Programming*; 14(2): 145-189.

[42] Rasila, A. 2007. Automaattisesti tarkastettavat tehtävät matematiikan opetuksessa. Interaktiivinen tekniikka koulutuksessa 2007- konferenssin tutkijatapaamisen artikkelit.

[43] Rasila, A. Työpaja "Automaattisesti tarkastettavat tehtävät" valtakunnallisilla LUMA-tiedepäivillä Teknillisessä korkeakoulussa 24.10.2008.

[44] Rasila, A. – Harjula, M. – Zenger, K. 2007. Automatic assessment of mathematics exercises: Experiences and future prospects. *ReflekTori 2007 Tekniikan opetuksen symposium 3.-4.12.2007 Teknillinen korkeakoulu.* (toim. Yanar, A., Saarela-Kivimäki, K.).

[45] Ropo, E. 1996. Oppiminen ja opiskelu uusissa oppimisympäristöissä. Elektroninen julkaisu Netixpress.

[46] Ruokokoski, J. 2009. Diplomityö (käsikirjoitus) Espoo: Teknillinen korkeakoulu.

[47] Sangwin, C. 2007. STACK: making many fine judgements rapidly. CAME.

[48] Seppälä, M. – Caprotti, O. – Xambo, S. 2006. Using Web Technologies to teach mathematics. SITE.

[49] Song, S. – Keller, J. 1999. The ARCS Model for Developing Motivationally-Adaptive Computer-Assisted Instruction. Paper presented at the National Convention for Educational Communications and Technology (21st, Houston, Texas, February 10-14, 1999)

[50] STACK- System for Teaching, and Assessment using a Computer algebra Kernel (viitattu 1.4.2009): `http://stack.sourceforge.net/`

[51] Stepancik, E. 2006. Medienvielfalt im Mathematikunterricht Teil 5 Allgemeine Evaluationsergebnisse und methodisch-didaktische Schlussfolgerunden. Hollabrun, December 2006.

[52] Strickland, N. 2002. Alice interactive mathematics. *MSOR Connections*; 2(1):27-30. (viitattu 25.2.2009): `http://ltsn.mathstore.ac.uk/newsletter/feb2002/pdf/aim.pdf`.

[53] Strotmann, A. – Ng'ang'a, W. – Caprotti, O. 2005. Multilingual Access to Mathematical Exercise Problems *Electronic Proceedings of the Internet Accessible Mathematical Computation Workshop*

[54] Suomen virtuaaliyliopisto. (viitattu 24.2.2009): `http://www.virtuaaliyliopisto.fi/`.

[55] Tella, S. 2001. Verkko-opetuksen lähtökohtia ja perusteita. *Verkko-opetuksen teoriaa ja käytäntöä* (toim. Tella S.m Nurminen, O., Oksanen, U., Vahtivuori, S.) Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos.

[56] Uljens, M. 1997. School Didactics and Learning A School Didactic Model Framing an Analysis of Pedagogical Implications of Learning Theory. Kasvatustieteen laitos. Åbo Akademi, Vaasa.

[57] WebALT Oy: kotisivu (viitattu 24.2.2009): `http://www.webalt.com`.

[58] WIRIS-virtuaalilaboratorion kotisivu (viitattu 7.4.2009):
`http://www.wiris.com/`.

12 Liitteet

12.1 Liite 1

Lukioasioita kertaavan Jumppa-paketin derivaatta-tehtävä

Tehtävänanto:
`Laske funktion`

$$f(x) = @f2x@$$

`pienin arvo välillä` $[0,5]$.

Tässä $@f2x@$ voi olla esimerkiksi funktio $x^3 + 12 \cdot x$.

Muuttujat:

```
a1 = rand([2,3,4,5])
f2x = x^3-3*a1^2*x
// Malliratkaisun välivaiheita:
f3x = diff(f2x,x)
k1 = 3*a1^2
k2 = k1/3
juuri1 = sqrt(k2)
juuri2 = -sqrt(k2)
arvo1 = 3-k1
arvo2 = 60.75-k1
TAns = juuri1^3-3*a1^2*juuri1
```

Malliratkaisu:
Koodi:

```
\[
f(x)=@f2x@
\]
Lasketaan ensin funktion $f(x)$ derivaatta potenssifunktion

derivointisäännön $Dx^n=n\cdot x^{n-1}$ avulla:
\[
f'(x)=@f3x@
\]
Funktion arvo on suurin sen derivaatan nollakohdissa
```

```
tai määrittelyvälin päätepisteissä.

Lasketaan ensin derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat:
\begin{eqnarray*}
@f3x@ & = & 0 \\
3x^2-@k1@ & = & 0 \\
3x^2 & = & @k1@ \\
x^2 & = & @k2@ \\
x=@juuri1@ & \text{tai} & x=@juuri2@.
\end{eqnarray*}
Näistä kahdesta juuresta vain juuri $x=@juuri1@$

kuuluu määrittelyalueeseen $x\in [0,5]$.

Tehdään kulkukaavio:

\begin{tabular}{llllll}
& 0 & & $@juuri1@$ & & 5 \\ \hline
$f'(x)$ & | & $-$ & | & $+$ & | \\
$f(x)$ & | & $\searrow$ & | &  $\nearrow$ & | \\ \hline
& & & min & &
\end{tabular}

$f'(1)=3\cdot1^2-@k1@=@arvo1@<0$

$f'(4.5)=3\cdot4.5^2-@k1@=@arvo2@>0$.

Funktiolla on siis minimikohta $x=@juuri1@$.

Funktion pienin arvo on
\[
f(@juuri1@)=@juuri1@^3-@k1@\cdot @juuri1@=@TAns@.
\]
```

Esimerkkinäkymä opiskelijalle:

$$f(x) = x^3 - 27 \cdot x$$

Lasketaan ensin funktion $f(x)$ derivaatta potenssifunktion derivointisäännön $Dx^n = n \cdot x^{n-1}$ avulla:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 27$$

Funktion arvo on suurin sen derivaatan nollakohdissa
tai määrittelyvälin päätepisteissä.
Lasketaan ensin derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x^2 - 27 &= 0 \\ 3x^2 - 27 &= 0 \\ 3x^2 &= 27 \\ x^2 &= 9 \\ x = 3 \quad &\text{tai} \quad x = -3. \end{aligned}$$

Näistä kahdesta juuresta vain juuri $x = 3$
kuuluu määrittelyalueeseen $x \in [0, 5]$.
Tehdään kulkukaavio:

	0		3		5
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			min		

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 27 = -24 < 0$
$f'(4.5) = 3 \cdot 4.5^2 - 27 = 33.75 > 0.$
Funktiolla on siis minimikohta $x = 3$.
Funktion pienin arvo on

$$f(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

12.2 Liite 2

Mathematics 1-kurssin matriisitehtävä

Tehtävänanto:
`Let`

$$A = \begin{bmatrix} @a11@ & @a12@ \\ @a21@ & @a22@ \end{bmatrix} \texttt{ and } B = \begin{bmatrix} @b11@ & @b12@ \\ @b21@ & @b22@ \end{bmatrix}.$$

`Calculate` $[A] + [B], @n@[B]$ `and` $[A][B]$.

Tässä voi olla esimerkiksi

$$A = \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{array} \right] \text{ ja } B = \left[\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{array} \right]$$

Muuttujat:

```
a11 = rand([0.1,2,3,4])
a12 = rand([0,1,2,3,4])
a21 = rand([-1,-2,-3,-4])
a22 = rand([0,1,2,3,4])
b11 = rand([-1,-2,-3,-4])
b12 = rand([0,1,2,3,4])
b21 = rand([0,1,2,3,4])
b22 = rand([-1,-2,-3,-4])
s11 = a11+b11
s12 = a12+b12
s21 = a21+b21
s22 = a22+b22
mb11 = -b11
mb22 = -b22
n = rand([2,3,4,5])
v11 = n*b11
v12 = n*b12
v21 = n*b21
v22 = n*b22
t11 = a11*b11+a12*b21
t12 = a11*b12+a12*b22
t21 = a21*b11+a22*b21
t22 = a21*b12+a22*b22
asw1 = matrix([s11,s12],[s21,s22])
asw2 = matrix([v11,v12],[v21,v22])
asw3 = matrix([t11,t12],[t21,t22])
```

Malliratkaisu:

Koodi:

```
\[[A]+[B]=[A+B]=\left[ \begin{array}{cc} @a11@ & @a12@ \\
@a21@ & @a22@ \end{array} \right]
+\left[ \begin{array}{cc} @b11@ & @b12@ \\
```

```
@b21@ & @b22@ \end{array} \right]
=\left[ \begin{array}{cc} @a11@-@mb11@ & @a12@+@b12@ \\
@a21@+@b12@ & @a22@-@mb22@ \end{array} \right]
= \left[ \begin{array}{cc} @s11@ & @s12@ \\
@s21@ & @s22@ \end{array} \right].
\]

\[@n@[B]=[@n@B]=@n@\left[ \begin{array}{cc} @b11@ & @b12@ \\
@b21@ & @b22@ \end{array} \right]
=\left[ \begin{array}{cc} @v11@ & @v12@ \\
@v21@ & @v22@ \end{array} \right].
\]

\[[A][B]=\left[ \begin{array}{cc} @a11@ & @a12@ \\
@a21@ & @a22@ \end{array} \right]
\left[ \begin{array}{cc} @b11@ & @b12@ \\
@b21@ & @b22@ \end{array} \right]
=\left[ \begin{array}{cc} @a11@\cdot (@b11@)
+@a12@\cdot @b21@ & @a12@\cdot @b12@+ @a12@\cdot (@b22@) \\
(@a21@)\cdot (@b11@)+@a22@\cdot @b21@ & (@a21@)\cdot @b12@
+@a22@\cdot(@b22@) \end{array} \right]
= \left[ \begin{array}{cc} @t11@ & @t12@ \\
@t21@ & @t22@ \end{array} \right]
\]
```

Esimerkkinäkymä opiskelijalle:

$$[A]+[B] = [A+B] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 3-1 & 2+4 \\ -4+3 & 3-1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{array} \right].$$

$$2[B] = [2B] = 2 \left[\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -2 & 8 \\ 6 & -2 \end{array} \right].$$

$$[A][B] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 3\cdot(-1)+2\cdot 3 & 2\cdot 4+2\cdot(-1) \\ (-4)\cdot(-1)+3\cdot 3 & (-4)\cdot 4+3\cdot(-1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 10 \\ 13 & -19 \end{array} \right].$$